Mémoire de magistère

Raphaël PONGE

décembre 1996

Table des matières

Première partie

Cursus magistère

Première année

J'ai suivi les cours suivants :

- Licence de mathématiques :
  - *Analyse 1* (Intégration) - Y. Brenier
  - *Géométrie différentielle 1* - J.P. Labesse
- Licence de physique :
  - *Mécanique statistique 1* - M. Moreau
  - *Mécanique quantique 1* - C. Delalande
  - *Modèles aléatoires en physique* - B. Derrida
- Maîtrise de mathématiques :
  - *Analyse 2* (Analyse fonctionnelle et distributions) - L. Desvillettes
  - *Théories spectrales* - G. Skandalis
  - *Algèbre 2* (Topologie algèbrique) - L. Schwartz
  - *Représentations linéaires des groupes finis* - A.M. Aubert
  - *Modélisation et analyse* - H. Berestycki
  - *Physique macroscopique* - Y. Pomeau
- Exposé :
  Exposé sur la formule de Feynman-Kac sous la direction de Y. Brenier.

Deuxième année :

En deuxième année j'ai passé l'agrégation et j'ai effectué un DEA de maths pures à Orsay. J'ai obtenu les AEA suivantes :

- *Introduction au calcul pseudo-différentiel* - P. Gérard
- *C^*-algèbres et feuilletages* (Paris 7) - G. Skandalis
- *Méthode de Laplace et équation de Schrödinger en grande dimension* - B. Helffer

J'ai fait mon stage de DEA sous la direction d'Alain Connes qui m'a demander de rédiger un mémoire sur la trace de Dixmier.

J'ai aussi assisté aux séances du groupe de travail de géométrie organisé par Eric Leichtnam et François Golse à l'ENS et dont le but était la lecture d'une note d'Alain Connes et de Bernard Julia établissant un lien entre théorie des nombres et mécanique statistique via la théorie des algèbres de Von Neunman.

Enfin j'ai assisté à quelques séances du séminaire d'algèbres d'opérateurs organisé par Georges Skandalis et Alain Connes au Collège de France.

Troisième année

J'ai commencé une thèse sous la direction d'Alain Connes dont le but est de définir un analogue du résidu de Wodzicki pour les variétés de Heisenberg.

J'ai suivi deux cours cette année. Le premier était le cours d'Alain Connes au Collège de France *"Fondements de la géométrie non commutative et modéle standard des interactions électromagnétiques faibles et fortes"*. Le deuxième était celui de J.B. Zuber (CEA) dans le cadre du DEA de maths de Paris 7 *"Théories quantiques des champs"*.

J'ai participé à une école d'été de géométrie et physque à Sinaïa (Roumanie). J'y ai suivi deux cours d'introduction, l'un sur les théories de jauge par V. Rivasseau (prof. X) et l'autre sur les groupes quantiques par P. Roche (CNRS-X).

J'ai aussi participé au groupe de travail de géométrie *"Opérateurs de Dirac, théorèmes de l'indice et géométrie non commutative"* organisé par E. Leichtnam, F. Golse et V. Maillot à l'ENS. J'ai fait deux exposés, l'un sur les opérateurs de Dirac, l'autre sur la cohomologie cyclique des fonctions lisses sur une variété et du tore non commutatif.

Enfin j'ai assisté à plusieurs séances du séminaire d'algèbres d'opérateurs organisé par Georges Skandalis et Alain Connes au Collège de France, notammemt aux quatres conférences données par M. Wodzicki.

Deuxième partie

Thèmes de recherche

Fondements de la géométrie non commutative

La géométrie de Riemann permet de définir des notions de droite et de distance pour des espaces non euclidiens. Sa donnée préalable est celle d'une variété M paramétrée par un nombre fini de coordonnées réelles x^μ et d'une métrique g sur l'espace tangent :

$$\|X\|^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \qquad \forall X \in TM.$$

Les droites sont déterminées par l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt}.$$

La distance entre deux points x et y de M est donnée par :

$$d(x,y) = \inf \left\{ \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \ ; \ \gamma \in C^1([0,1], M), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

La géométrie riemannienne est la cadre mathématique de la relativité générale car elle fournit un excellent modèle de l'espace-temps pour des échelles de distances pas trop petites. Mais ce n'est plus le cas dès qu'on aborde des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck :

$$l_p = (G\hbar/c^3)^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-33}\,\mathrm{cm}\,.$$

D'autre part, si la mécanique est adequat pour décrire les petites distances ce n'est pas une théorie relativiste. L'un des buts de la géométrie non commutative est de développer le formalisme opératoriel de la mécanique quantique, et plus précisèment, celui de la mécanique des matrices de Heisenberg, afin d'obtenir un cadre géométrique permettant une description plus souple de l'espace-temps à courte comme à grande échelle. Ce qui est remarquable c'est que le cadre est suffisamment large pour pouvoir traiter les espaces riemanniens, les espaces discrets, les espaces de configuration de la théorie quantique des champs ou les espaces duaux des groupes discrets non nécessairement commutatifs.

La donnée d'un espace géométrique est alors celle d'un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive unifère se rprésentant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et D est un opérateur non borné auto-adjoint de $\mathcal{H}$. Ceci correspond à la dualité espace $\leftrightarrow$ algèbre. Par exemple le théorème de Gel'fand affirme que si $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre commutative alors elle est isomorphe à la C^*-algèbre des fonctions continues sur son spectre, i.e. l'espace compact $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ des caractères de $\mathcal{A}$ munis de la topologie faible.

1 Calcul quantifié

La première étape pour définir une géométrie est de se donner un calcul infinitésimal permettant de passer du local au global. Notre cadre est imposé par la mécanique, c'est celui d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ qui se décomposant en somme directe :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

de deux sous-espaces orthogonaux de dimensions infinies. Ceci revient à se donner un opérateur F de $\mathcal{H}$ tel que :

$$F|_{\mathcal{H}_1} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_1} \qquad \text{et} \qquad F|_{\mathcal{H}_2} = -\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}_2}\,.$$

En particulier :

$$F^* = F \qquad \text{et} \qquad F^2 = 1.$$

Donnons les premières lignes du dictionnaire exprimant dans le langage opératoriel de la mécanique quantique les principales notions du calcul infinitésimal classique :

CLASSIQUE	QUANTIQUE
Variable complexe	Opérateur borné de $\mathcal{H}$
Variable rélle	Opérateur borné auto-adjoint de $\mathcal{H}$
Infinitésimal	Opérateur compact
Infinitésimal d'ordre $\alpha > 0$	Opérateur compact tel que $\mu_n(T) = 0(n^{-\alpha})$
Différentielle de f	$đf = [F, f]$
Intégrale $\int$	Trace de Dixmier $⨍$

• *Variable complexe-variable réelle*

Ces deux lignes sont usuelles en mécanique quantique. L'ensemble des valeurs d'une variable $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est donné par son spectre :

$$\mathrm{Sp}\, T = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ (T - \lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{-1}\}.$$

Le calcul fonctionnel holomorphe permet de sens à $f(T)$ pour toute fonction holomorphe au voisinage de $\mathrm{Sp}\, T$, ce qui permet de faire de l'analyse complexe. Mais lorsqu'on veut faire de l'analyse réelle et définir $f(T)$ pour toute fonction borélienne sur $\mathrm{Sp}\, T$ cela n'est possible que pour T normal, i.e. $T^*T = T^*T$. Or lorsque $\mathrm{Sp}\, T \subset \mathbb{R}$, cette dernière condition est équivalente à la condition "T auto-adjoint".

• *Opérateurs infinitésimaux*

On veut définir la notion d'opérateur infinitésimal, c.a.d. d'opérateur dont les valeurs sont infiniment petites. La condition :

$$\|T\| \leq \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0.$$

n'est pas satisfaisante mais on peut l'affaiblir en :

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un sous-espace E de $\mathcal{H}$ de dimension finie telle que $\|T|_{E^\perp}\| \leq \epsilon$.

Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$ on a $\|T\| \leq \epsilon$ en dehors d'un sous-espace de dimension finie. Cette propriété est caractéristique des opérateurs compacts, c.a.d. des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dont l'image de la boule unité est relativement compacte. L'ensemble $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts est un idéal bilatère fermé maximal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de sorte que si S et T sont des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ on a :

$$T \text{ infinitésimal} \Longrightarrow ST \text{ et } TS \text{ infinitésimaux},$$
$$T \text{ infinitésimal} \Longleftrightarrow |T| \text{ infinitésimal}.$$

Ici $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ est le module de T. On en déduit la caractérisation suivante des opérateurs compacts :

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est compact si, seulement si, le spectre de —T— est formé d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies qui tendent vers 0.

Si T est compact on range les valeurs propres de $|T|$ comptées avec leurs multiplicités en suite décroissante de réels positifs :

$$\mu_0(T) \geq \mu_1(T) \geq \ldots \geq \mu_n(T) \geq \ldots.$$

En particulier $\mu_0(T) = \|T\|$. On dit que $\mu_n(T)$ est la *n-ième valeur caractéristique de T*. Les valeurs caractéristiques permettent de mesurer la taille de l'infinitésimal T car le principe du min-max affirme qu'on a :

$$\mu_n(T) = \inf\{\|T|_{E^\perp}\|\ ;\ \dim E = n\}.$$

On dit que T est un *infinitésimal d'ordre* $\alpha > 0$ si on a :

$$\mu_n(T) = 0(n^{-\alpha}).$$

L'ensemble des infinitésimaux d'ordre α est un idéal bilatère et on a :

$$\left.\begin{array}{l} T_1 \text{ infitésimal d'ordre } \alpha_1 \\ T_2 \text{ infitésimal d'ordre } \alpha_2 \end{array}\right) \Longrightarrow T_1T_2 \text{ infitésimal d'ordre } \alpha_1\alpha_2,$$

de sorte qu'hormis la commutativité toutes les régles algébriques du calcul infintésimal classique sont conservées.

A ce stade, comme la taille d'un infinitésimal est mesurée par une suit $\mu_n \to 0$, il pourrait sembler inutile d'utiliser le formalisme opératoriel. On pourrait remplacer l'idéal $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par l'ideal $c_0(\mathbb{N})$ des suites convergeant vers 0 dans l'algèbre $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées. Cette version commutative ne convient pas car tout élèment de $l^\infty(\mathbb{N})$ a un spectre ponctuel. Ce n'est que la *non commutativité* de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui permet la co-existence de variables ayant un spectre de Lebesgue avec des variables infinitésimales.

- *Différentielle*

Cette ligne utilise de manière cruciale la non commutativité de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Le passage de la différentielle classique $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$ à la différentielle quantique $đf = [F, f]$ est analogue au passage en mécanique quantique du crochet de Poisson $\{f, g\}$ au commutateur $[f, g]$ de deux obsevables. De plus, l'égalité $F^2 = 1$ implique :

$$đđf = [F, [F, f]] = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{A}.$$

- *Trace de Dixmier*

On cherche un analogue quantique de l'intégrale. Pour cela on cherche une trace sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de telle sorte que :

- son domaine de définition contienne les infinitésimaux d'ordre 1,
- elle s'annulle sur les infinitésimaux d'ordre < 1.

On a une trace naturelle sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Elle est définie sur l'idéal bilatère normé $\mathcal{L}^1$ des opérateurs à trace :

$$T \in \mathcal{L}^1 \Longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} \mu_n(T) < \infty,$$

$$\|T\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^1.$$

La trace de $T \in \mathcal{L}^1$ est donnée par la valeur de la somme :

$$\text{Trace}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n | T \xi_n \rangle,$$

où $(\xi_n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (la valeur de la somme est indépendante du choix de la base $(\xi_n)_{n \geq 0}$). Cette trace ne convient pas car elle satisafait à aucune des deux propriètés voulues. Néanmoins le problème est résolu par la trace de Dixmier.

L'ensemble naturel de définition de la trace de Dixmier est l'idéal bilatère normé $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ obtenu par interpolation réelle de $\mathcal{L}^1$ et de $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{L}^{(1,\infty)} = \{T \; ; \; \sup_{u \geq e} \frac{\sigma_u(T)}{\log u} < \infty\},$$

$$\|T\|_{(1,\infty)} = \sup_{u \geq e} \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}.$$

Ici $\sigma_\lambda(T)$ est la fonction d'interpolation de $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{K}$, définie pour tout $T \in \mathcal{K}$ et $\lambda > 0$ par :

$$\sigma_\lambda(T) = \inf\{\|x\|_1 + \lambda\|y\| \; ; \; (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \text{ et } x + y = T\} \qquad \forall \lambda \geq 0.$$

Pour tout $T \in \mathcal{K}$ la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est affine entre deux entiers consécutifs et pour tout entier N on a :

$$\sigma_N(T) = \sum_{n < N} \mu_n(T).$$

Autrement dit cette fonction est l'interpolation affine des sommes partielles $\sum_{n<N} \mu_n(T)$. En terme de boule unité, disons que la boule unité pour σ_λ est l'enveloppe convexe de la boule unité de $\mathcal{L}^1$ et de λ^{-1} fois la boule unité de $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$ le cône positif des élèments positifs de $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$. L'application de $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$ dans $C_b([e,+\infty))$:

$$T \longmapsto \left(\frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}\right)_{\lambda \geq e},$$

n'est pas additive. Néanmoins lorsqu'on considère la moyenne de Cesaro de $\lambda \mapsto \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}$ par rapport à la mesure de Haar $\frac{d\lambda}{\lambda}$ du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$:

$$\tau_\lambda(T) = \frac{1}{\log \lambda} \int_1^\lambda \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \frac{du}{u} \qquad \forall T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)} \ \forall \lambda \geq 1,$$

on a l'inégalité asymptotique :

$$|\tau_\lambda(T_1+T_2) - \tau_\lambda(T_1) - \tau_\lambda(T_2)| \leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)} \frac{(\log\log\lambda + 2)\log 2}{\log \lambda}.$$

Cette inégalité est la clé pour définir la trace de Dixmier. Elle signifie que les fonctionnelles τ_λ sont de deviennent additives lorsque λ devient infini. Il en résulte que tout limite simple τ de ces fonctionnelles définit une trace positive additive sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$:

$$\begin{aligned}
\tau(ST) = \tau(TS) &\qquad \forall S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}, \\
T \geq 0 \Longrightarrow \tau(T) \geq 0,& \\
\mu_n(T) = \mathrm{o}(\frac{1}{n}) \Longrightarrow \tau(T) = 0,& \\
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = L \Longrightarrow \tau(T) = L &\qquad T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}.
\end{aligned}$$

On dit que $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est *mesurable* si la valeur de $\tau(T)$ est indépendante du point limite τ. On note alors cette valeur $⨍ T$; c'est la trace de Dixmier de T.

Exemples. 1) Soit M une variété compacte riemannienne de dimension n et P un ΨDO (opérateur pseudo-différentiel) sur M d'ordre $-n$. Alors, l'opérateur P s'étend en un opérateur borné de $L^2(M)$ qui est un opérateur infinitésimal d'ordre 1 mesurable pour la trace de Dixmier. Sa trace de Dixmier est donnée par :

$$⨍ P = \frac{1}{n} \operatorname{Res} P,$$

où $\operatorname{Res} P$ est le résidu de Wodzicki de P :

$$\operatorname{Res} P = (2\pi)^{-n} \int_{S^*M} \sigma_{-n}(P)(x,\xi) dx d\xi,$$

où S^*M est le fibré en sphères du fibré cotangent T^*M et $\sigma_{-n}(P)$ est le symbole principal de P. Lorsque P est un ΨDO sur M d'ordre quelconque, son symbole d'ordre $-n$ n'est défini que localement, mais on peut montrer que l'intégrale :

$$\sqrt{g(x)} \int_{S_x^*M} \sigma_{-n}(P)(x,\xi) d\xi,$$

peut être définie globalement sur M comme une 1-densité. Il en résulte que le résidu peut de Wodzicki est défini pour n'importe quel ΨDO sur M et qu'on peut prolonger la trace de Dixmier à toute l'algèbre des ΨDO sur M en posant :

$$⨍ P = \frac{1}{n} \operatorname{Res} P \qquad \forall P \in \Psi(M).$$

2) Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$. On a un calcul quantifié sur S^1 pour $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ et F définit par :

$$F(e_n) = \operatorname{sign}(n) e_n, \qquad e_n(x) = e^{inx} \qquad \forall x \in S^1.$$

Soit J l'ensemble de Julia associé au système dynamique $z \mapsto z^2 + c$ $(c \neq 0)$:

$$J = \partial B, \qquad B = \{z \ ; \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\phi^n(z)| < \infty\}.$$

Pour c petit, J est une courbe de Jordan et B est la composante bornée de son complèmentaire. On peut alors montrer qu'il existe une équivalence conforme entre B et le disque unité ouvert D. Cette équivalence se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{D}$ dans $\bar{B}$ dont l'inverse définit par restriction un homéomorphisme $Z : S^1 \mapsto J$. La dimension de Hausdorff de la courbe de Jordan est un réel $p > 1$ de sorte que la fonction Z n'est nulle à variation bornée et qu'on ne peut pas définir $|Z'|$ même en invoquant les distributions. Néanmoins $|đZ|$ a un sens dans notre calcul infinitésimal et il vérifie les propriétés suivantes :

- l'opérateur $|đZ|$ est un infinitésimal d'ordre $\frac{1}{p}$;
- pour toute fonction continue sur J, l'opérateur $f(Z)|đZ|^p$ est mesurable ;
- il existe une constante $C_J > 0$ de telle sorte qu'on ait :

$$⨍ f(Z)|đZ|^p = C_J \int_J f d\Lambda_p \qquad \forall f \in C(J),$$

  où $d\Lambda_p$ désigne la mesure de Hausdorff sur J.

2 Notion de variété en géométrie non commutative

2.1 Cas des variétés riemanniennes

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral. Lorsque n est pair on suppose que $\mathcal{H}$ est Z_2-gradué par γ :

$$\gamma^* = \gamma \qquad \text{et} \qquad \gamma^2 = 1.$$

Lorsque l'algèbre involutive $\mathcal{A}$ est commutative, on paut caractériser les triplets spectraux provenant d'une variété compacte de dimension n par les axiomes (1) à (7) qui vont suivre. Les deux premiers axiomes sont :

(1) *Dimension.* L'opérateur $ds = D^{-1}$ est infinitésimal d'ordre $\frac{1}{n}$.

(2) *Ordre 1.* On a $[[D, a], b] = 0$ pour tout a et b dans $\mathcal{A}$.

Dans le cas où D agit sur les sections d'un fibré au-dessus d'une variété M, l'axiome (2) dit précisèment que D est un opérateur différentiel d'ordre 1

(3) *Régularité.* Pour tout $a \in \mathcal{A}$, les opérateurs a et $[D, a]$ sont dans $\cap_k \operatorname{dom} \delta^k$, où δ est la dérivation de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: $T \mapsto [|D|, T]$.

Un cycle de Hochschild $c \in Z_k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est un élèment de $\mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$ tel que $bc = 0$, où b est le bord de Hochschild :

$$\begin{aligned} b(a^0 \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^n) = &\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a^0 \otimes \ldots a^j a^{j+1} \otimes \ldots \otimes a^n \\ &+ (-1)^n a^n a^0 \otimes \ldots \otimes a^{n-1}. \end{aligned}$$

Conceptuellement l'homologie de Hochschild est la formulation algèbrique des formes différentielles.

(4) *Orientabilité.* Il existe un cycle de Hochschild $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ tel que $\pi(c) = \gamma$ (cas pair) ou $\pi(c) = 1$ (cas impair), où π est l'unique application linéaire de $\mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$ telle que :

$$\pi(a^0 \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^n) = a^0[D, a^1] \ldots [D, a^n] \qquad \forall a^j \in \mathcal{A}.$$

Il résulte de cet axiome que pour tout $a \in \mathcal{A}$ l'opérateur ads^n est mesurable, ce qui nous permet d'énoncer l'axiome suivant :

(5) *Finitude.* Le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{E} = \cap_k \operatorname{dom} D^k$ est projectif de type fini, et il existe une unique métrique hermtienne $(.,.) : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{A}$ telle que :

$$\langle a\xi, \eta, =\rangle ⨍ a(\xi, \eta) ds^n \qquad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{E}^2, \forall a \in \mathcal{A}.$$

On définit les K-groupes de $\mathcal{A}$ de la façon suivante :

- Le groupe $K_0(\mathcal{A})$ est le groupe abélien engendré par le semi-groupe des classes d'équivalences des projecteurs de $M_\infty(\mathcal{A})$: deux projecteurs e, f dans $M_k(\mathcal{A})$ ($e^2 = e^* = e$ et $f^2 = f^* = f$) sont dits équivalents s'il existe $u \in M_k(\mathcal{A})$ telle que $u^*u = e$ et $uu^* = f$. La somme sur $K_0(\mathcal{A})$ correspond à l'opération de somme directe : $(e, f) \to e \oplus f$.
- Le groupe $K_1(\mathcal{A})$ est le groupe abélianisé de $Gl_\infty(\mathcal{A})$, c.a.d. son quotient par le sous-groupe des commutateurs.

On définit l'indice de D à coefficient dans $K_n(\mathcal{A})$, où n varie modulo 2, comme l'application additive $\operatorname{ind} D$: $K_n(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ définie par :

- si n est pair :

$$\langle \operatorname{ind} D, [e] \rangle = \operatorname{ind} e(D_+ \otimes I_k)e \qquad \forall e \in \operatorname{Proj} M_k(\mathcal{A}),$$

  où $D_+ = (1-p)Dp$ avec $p = \frac{1}{2}(1+\gamma)$.

- si n est impair :

$$\langle \operatorname{ind} D, [u] \rangle = \operatorname{ind}(P \otimes I_k)u(P \otimes I_k) \qquad \forall u \in Gl_k(\mathcal{A}),$$

  où $P = \frac{1}{2}(1+F)$ avec $F = \operatorname{sign} D$.

L'application diagonale :

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad m(a \otimes b) = ab \quad \forall (a,b) \in \mathcal{A}^2,$$

définit par fonctorialité une application $m_* : K_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \to K_n(\mathcal{A})$, qui composée avec $\operatorname{ind} D$ donne la forme d'intersection :

$$\begin{aligned} K_n(\mathcal{A}) \times K_n(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto \langle \operatorname{ind} D, m_*(x \otimes y) \rangle. \end{aligned}$$

On peut alors énoncer l'axiome (6) :

(6) *Dualité de Poincaré.* La forme d'intersection $K_n(\mathcal{A}) \times K_n(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ est inversible.

Comme $\mathcal{A}$ est commutative, il en est de même de la fermeture normique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, la C^8-algèbre A. Le théorème de Gel'fand affirme alors que A est l'algèbre des fonctions continues sur l'espace $X = \operatorname{Sp} A$ des caractères sur A (i.e les morphismes d'algèbres unitaux de A dans $\mathbb{C}$). Mais comme tout caractère de $\mathcal{A}$ se prolonge automatiquement en un caractère de A, l'espace X est celui des caractères de $\mathcal{A}$. Grâce à un théorème de D. Sullivan cette dualité de poincaré caractérise les espaces X ayant le type d'homotopie d'une variété. Ceci requiert l'utilisation de la K-théorie réelle plutôt que la K-théorie complexe ci-dessus et l'axiome (7) affirme précisément l'existence d'une telle structure pour $\mathcal{A}$:

(7) *Réalité.* Il existe une isométrie anti-linéaire $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ telle que :

$$JaJ^{-1} = a^* \qquad \forall a \in \mathcal{A},$$
$$J^2 = \epsilon, \qquad JD = \epsilon' DJ, \qquad J\gamma = \epsilon'' \gamma J,$$

où ϵ, ϵ et ϵ sont déterminés par la valeur de n modulo 8 selon le tableau :

	0	1	2	3	4	5	6	7
ϵ	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ϵ'	1	-1	1	1	1	-1	1	1
ϵ''	1		-1		1		-1	

Si le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ vérifie les axiomes (1) à (7), alors X est une variété compacte de dimension n. On peut montrer qu'il existe une unique métrique riemannienne $g(\pi)$ sur X de telle sorte que la distance géodésique soit donnée par :

$$d(x,y) = \sup\{|a(x) - a(y)| \ ; \ a \in \mathcal{A}, \|[D,a]\| \leq 1\}.$$

Cette métrique $g(\pi)$ ne dépend que de la classe d'équivalence unitaire de π. Réciproquement, l'algèbre $\mathcal{A}$ étant fixée et étant donnée une métrique riemannienne de la forme $g(\pi)$ ci-dessus, il existe une unique structure spinorielle S_σ sur X telle que g soit donnée par le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}_\sigma, D_\sigma)$, où $\mathcal{H}_\sigma = L^2(X, S_\sigma)$ et D_σ est l'opérateur de Dirac. Dans ce cas la valeur de $⨍ ds^{n-2}$ est minamale et égale à l'action d'Hilbert-Einstein pour la métrique g :

$$⨍ ds^{n-2} = -c_n \int_X r\sqrt{g} d^n x, \qquad c_n = \frac{2^{[n/2]}(n-2)}{24(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

où r désigne la courbure scalaire et $\sqrt{g} d^n x$ la densité riemannienne.

2.2 Variétés spectrales

Montrons comment on peut définir une notion de variété lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ n'est plus commutative.

le produit de $\mathcal{A}$ n'intervenant pas dans la formulation des axiomes (1), (3) et (5) on peut les laisser inchangés. Commençons par modifier l'axiome (7). Le point de départ est la théorie de Tomita qui associe à tout vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ cyclique pour $\mathcal{A}$ et son commutant $\mathcal{A}'$:

$$\bar{\mathcal{A}}\xi = \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathcal{A}'}\xi = \mathcal{H},$$

une involution anti-linéire isométrique $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, obtenue à partir de la décomposition polaire de l'opérateur :

$$Sa\xi = a^*\xi \qquad \forall a \in \mathcal{A},$$

et qui vérifie de plus :

$$J\mathcal{A}'' J^{-1} = \mathcal{A}'.$$

En particulier, on a $[a, b^0] = 0 \quad \forall (a, b) \in \mathcal{A}^2$, où on utilise la représentation suivante de l'algèbre opposée $\mathcal{A}^0$ dnas $\mathcal{H}$:

$$a^0 = Ja^*J^{-1} \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est commutative on a $a = a^0 \quad \forall a \in \mathcal{A}$, de sorte que l'égalité de l'axiome (7) $a = Ja^*J^{-1} \quad \forall a \in \mathcal{A}$ est compatible avec l'involution de Tomita. On en déduit que dans le cas non commutatif, pour que l'axiome (7) soit toujours compatible avec l'involution de Tomita on doit remplacer cette égalité par :

(7') Pour tout a et b dans $\mathcal{A}$ on a $[a, b^0] = 0$ où $b^0 = Jb^*J^{-1}$.

Le reste de l'axiome (7) reste inchangé. Ceci munit $\mathcal{H}$ d'une structure de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$-module :

$$a \otimes b^0.\xi = aJb^*J^{-1}\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}, \forall (a, b) \in \mathcal{A}^2.$$

et permet définir une classe μ de KR^n-homologie (n variant modulo 8) pour l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$ munie de l'automorphisme anti-linéaire :

$$\tau(a \otimes b^0) = b^* \otimes a^{*0} \qquad \forall (a, b) \in \mathcal{A}^2.$$

Le produit d'intersection de Kasparov permet alors de formuler la dualité de Poincaré comme l'invertibilité de μ :

(6') Il existe $\beta \in KR_n(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$ telle que :

$$\beta \otimes_{\mathcal{A}} \mu = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \qquad \text{et} \qquad \mu \otimes_{\mathcal{A}_0} \beta = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

L'homologie de Hochschild peut être définie à coefficient dans un bimodule et on peut munir l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$ d'une structure de $\mathcal{A}$-bimodule :

$$a(b \otimes c^0)d = (abd) \otimes c^0 \qquad \forall (a, b, c, d) \in \mathcal{A}^4.$$

On remplace alors l'axiome (4) par :

(4') Il existe un cycle de Hochschild $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$ tel que $\pi(c) = \gamma$ (cas pair) ou $\pi(c) = 1$ (cas impair).

Ici c est un élèment de $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^0)\otimes\mathcal{A}^{\otimes^n}$ et $\pi(c)$ est définit à l'aide de la représentation de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^0$ dans $\mathcal{H}$.

Enfin on remplace l'axiome (2) par :

(2') Pour tout a et b on a $[[D,a],b^0]=0$.

On appelle alors *variété spectrale* de dimension n tout triplet spectral $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ qui vérifie les axiomes (1)-(7'). L'algèbre $\mathcal{A}$ une fois fixée, une *géométrie spectrale* sur $\mathcal{A}$ est déterminée par la classe déquivalence unitaire du triplet spectral $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ avec l'isométrie J. Deux triplets spectraux $(\mathcal{A}_i,\mathcal{H}_i,D_i)$ (i=1,2) sont dits unitairement équivalents s'il existe un unitaire $U:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ tel que :

$$
\begin{gathered}
U\pi_1(a)U^*=\pi_2(a) \qquad \forall a\in\mathcal{A},\\
UD_1U^*=D_2, \qquad UJ_1U^*=J_2,
\end{gathered}
$$

(et $U\gamma_1U^*=\gamma_2$ dans le cas pair).

Dans le cas non commutatif le rôle du groupe $\mathrm{Diff}(X)$ des difféomorphismes de la variété X est joué par le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ des automorphismes de l'algèbre involutive $\mathcal{A}$. Dans la cas commutatif on a un isomorphisme entre $\mathrm{Diff}(M)$ et $\mathrm{Aut}(C^\infty(M))$ donné par :

$$
\alpha\longrightarrow\alpha_\phi, \qquad \alpha_\phi(f)=f\circ\phi^{-1} \quad \forall f\in C^\infty(M),\forall\phi\,\mathrm{Diff}(M).
$$

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ agit sur les géométries de $\mathcal{A}$ par composition :

$$
\pi\to\pi_\alpha \qquad \pi_\alpha(a)=\pi(\alpha^{-1}(a)) \quad \forall a\in\mathcal{A},\forall\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A}).
$$

Dans le cas non commutatif le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ admet un sous-groupe normal non trivial, le groupe $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ des automorphismes intérieurs, i.e. les automorphismes de la forme :

$$
\alpha_u(a)=u^*au \qquad \forall a\in\mathcal{A},
$$

où $u\in\mathcal{A}$ est unitaire. Si $u\in\mathcal{A}$ est unitaire la géométrie sur $\mathcal{A}$ associée à π_{α_u} est équivalente à celle obtenue en laissant inchanger la représentation π mais en faisant la modification suivante sur D :

$$
D\longrightarrow D+u[D,u^*]+Ju[D,u^*]J^{-1}.
$$

L'équivalence unitaire étant donnée par l'unitaire :

$$
U=uJuJ^{-1}=u(u^*)^0.
$$

Cette géométrie est en fait un cas particulier de géométrie obtenue par *déformation intérieure de la géométrie* de $\mathcal{A}$. Une telle géométrie est obtenue, sans modification de la représentation π ni de l'involution J, par le remplacement de D par :

$$
D+A+JAJ^{-1},
$$

où A est un opérateur auto-adjoint de la forme :

$$
A=\sum_i a_i[D,b_i], \qquad (a_i,b_i)\in\mathcal{A}^2.
$$

Exemple. *Tore non commutatif.* Soit $\theta\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On considère l'algèbre involutive :

$$
\mathcal{A}_\theta=\{\sum a_{m,n}U^mV^n\ ;\ (a_{m,n})\in\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)\},
$$

où $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ est l'espace des suites doubles à décroissance rapide. La structure d'algèbre involutive de $\mathcal{A}_\theta$ est donné par la présentation :

$$
UV=e^{2i\pi\theta}VU, \qquad U^*=U^{-1}, \qquad V^*=V^{-1}.
$$

Pour déterminer une géométrie sur $\mathcal{A}_\theta$ on se donne un nombre complexe τ tel que $\Im\tau>0$. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\theta$ est la somme de deux copies de $L^2(\mathcal{A}_\theta,\tau_0)$, où τ_0 est la trace normalisée :

$$
\tau(a)=a_{0,0}, \qquad a=\sum a_{m,n}U^mV^n,
$$

et l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau_0)$ est le complété de $\mathcal{A}_\theta$ pour le produit scalaire :

$$\langle a, b\rangle = \tau_0(a^* b) \qquad \forall (a,b) \in \mathcal{A}_\theta^2.$$

La représentation de $\mathcal{A}_\theta$ dans $\mathcal{H}_\theta$ est donné par la multiplication à gauche :

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda(a) & 0 \\ 0 & \lambda(a) \end{pmatrix}, \qquad \lambda(a)b = ab \quad \forall (a,b) \in \mathcal{A}_\theta^2.$$

L'opérateur D_θ est donné par la matrice :

$$D_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 + \tau\delta_2 \\ -\delta_1 - \overline{\tau}\delta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

où δ_1 et δ_2 sont les dérivations basiques de $\mathcal{A}_\theta$:

$$\begin{aligned} \delta_1(U) &= 2i\pi U, \qquad & \delta_2(U) &= 0, \\ \delta_1(V) &= 0, \qquad & \delta_2(U) &= 2i\pi V. \end{aligned}$$

La $\mathbb{Z}_2$-graduation est donnée par $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et l'involution est $J_\theta = \begin{pmatrix} 0 & J_0 \\ -J_0 & 0 \end{pmatrix}$, où J_0 est l'involution de Tomita :

$$J_0 a = a^* \qquad \forall a \in L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau_0).$$

En particulier $J_0 \lambda(a^*) J_0^{-1} = \rho(a)$ est l'opérateur de multiplication à droite par a.

On vérifie qu'on a bien une géométrie spectrale sur $\mathcal{A}_\theta$ et que cette géométrie ne dépend que de l'orbite de τ pour l'action $PSL(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.

3 Géométrie de l'espace-temps et principe d'action spectral

A des énergies raisonnablement faibles, la description euclidienne de l'espace-temps se déduit complétement de la fonctionlle d'action :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_E + \mathcal{I}_{SM},$$

où :

$$\mathcal{I}_E = \frac{-1}{16\pi G} \int_M r\sqrt{g} d^4x,$$

est l'action d'Hilbert-Einstein pour la métrique g de la variété riemannienne spinorielle M de dimension 4, et où :

$$\mathcal{I}_{SM} = \int_M \mathcal{L}_{SM} \sqrt{g} d^4x, \qquad \mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{G\phi} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\phi f} + \mathcal{L}_{Gf},$$

est l'action du modèle standard de la physique des particules. Le lagrangien $\mathcal{L}_{SM}$ invoque plusieurs champs de bosons et de fermions :

- les bosons G qui sont de spin 1 : le photon γ, les bosons médiateurs $W^\pm$ et Z et les huit gluons ;
- les fermions f qui sont de spin $\frac{1}{2}$ et qui foment trois familles de quarks et de leptons associées à leurs anti-particules ;
- les bosons de spin 0 sont les champs de Higgs qui sont introduits pour rendre compatibles la renormalistion et le phénomène de brisure spontanée de symétrie.

Le groupe de symétrie de $\mathcal{I}_E$ et $\mathrm{Diff}(M)$ et celui de $\mathcal{I}SM$ est :

$$\mathcal{U} = C^\infty(M, U(1) \times SU(2) \times SU(3)),$$

de sorte que que le groupe de symétrie de la fonctionnelle d'action $\mathcal{I}$ est le produit semi-direct :

$$G = \mathcal{U} \rtimes \mathrm{Diff}(M).$$

La première étape consiste à trouver un espace géométrique X tel que $\mathrm{Diff}(X) = G$. Dans la cas non commutatif, le rôle de $\mathrm{Diff}(X)$ est joué par $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Ceci nous détermine l'algèbre involutive $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F, \qquad \mathcal{A}_F = \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes M_3(\mathbb{C}),$$

où l'algèbre involutive $\mathcal{A}_F$ est la somme directe des algèbres $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $\mathbb{H}$ des quaternions et $M_3(\mathbb{C})$ des matrices 3×3 à coefficients complexes.

Étant données deux géométries spectrales $(\mathcal{A}_j, \mathcal{H}_j, D_j)$ ($j = 1, 2$), la première étant $\mathbb{Z}_2$-graduée par γ_1, on peut définir une géométrie produit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où on a :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \qquad D = D_1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes D_2.$$

Comme l'algèbre involutive $\mathcal{A}$ est elle-même un produit tensoriel, cette construction suggère de prendre comme modèle de l'espace-temps la géométrie produit :

$$\mathcal{A} = C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}_F, \qquad \mathcal{H} = L^2(M, \mathcal{S}) \otimes \mathcal{H}_F, \qquad D = \partial_M \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F,$$

où $L^2(M, \mathcal{S})$ est l'espace de Hilbert des spineurs de carré intégrable et ∂_M est l'opérateur de Dirac de M. La géométrie $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$ est une géométrie finie sur $\mathcal{A}_F$. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_F$ est engendré par les fermions élémentaires :

	Quarks	
up (u)	charm (c)	top (t)
down (d)	special (s)	bottom (b)
	Leptons	
neutrino-électron (ν_e)	neutrino-muon (ν_μ)	neutrino-tau (ν_τ)
électron (e)	muon (μ)	tau (τ)

Il faut rajouter l'indice de chiralité :

$$f_J, \qquad J = L \text{ (gauche)}, R \text{ (droite)}.$$

sauf pour les neutrinos qui sont tous de chiralité gauche. Les quarks ont de plus un indice de couleur :

$$q^j, \qquad j = y \text{ (yellow)}, r \text{ (red)}, b \text{ (blue)}.$$

Charque particule est associée à une anti-particule :

$$f \longrightarrow \bar{f} \qquad f \text{ particule.}$$

Il y a donc en tout 90 fermions élèmentaires. La corespondance particule $\leftrightarrow$ ant-particule nous donne l'involution J_F :

$$J_F = (\sum_i \lambda_i f_i + \sum_j \mu_j \bar{f}_j) = \sum_j \bar{\mu}_j f_j + \sum_i \bar{\lambda}_i \bar{f}_i.$$

Décrivons l'action de $\mathcal{A}_F$ sur $\mathcal{H}_F$. Soit $a = (\lambda, q, m)$ dans $\mathcal{A}_F$. On représente le quaternion q sous forme matricielle :

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

L'action de a sur la première famille de quarks est donnée indépendament de l'indice de couleur par :

$$au_R = \lambda u_R, \qquad au_L = \alpha u_L - \bar{\beta} d_L,$$
$$ad_R = \bar{\lambda} d_R, \qquad ad_L = \beta u_L + \bar{\alpha} d_L.$$

L'action est la même pour les autres familles de quarks. Pour les leptons l'action est similaire, pour la première famille elle est donnée par :

$$au_L = \alpha \nu_e - \bar{\beta} e_L,$$
$$ae_R = \bar{\lambda} e_R, \qquad ad_L = \beta \nu_e + \bar{\alpha} e_L.$$

L'action sur les anti-particules est :

$$a\bar{l} = \lambda \bar{l}, \qquad l \text{ lepton},$$
$$a\bar{q} = m\bar{q}, \qquad q \text{ quark},$$

où la matrice m agit sur l'indice de couleur.

L'opérateur D_F est donné par la matrice :

$$D_F = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & \bar{Y} \end{pmatrix},$$

où Y est la matrice de couplage de Yukawa, de la forme :

$$Y = (Y_q \otimes 1_3) \oplus Y_l,$$

avec :

$$y_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_d \\ M_u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_e \\ 0 & 0 & 0 \\ M_e^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S'il n'y avait qu'une seule famille de quarks et de leptons M_u, M_d et M_e corresponderaient aux masses des fermions, mais ici cs sont des matrices 3×3 dont les coefficients dépendent des masses des fermions et de leurs propriètés de mélange.

La chiralité la $\mathbb{Z}_2$-graduation sur $\mathcal{H}_F$:

$$\gamma_F(f_R) = f_R, \qquad \gamma_F(f_L) = f_L, \qquad f \text{ part. ou anti-part.}$$

On obtient ainsi une géomètrie finie F qui vérifie les axiomes (1)-(7)'. La deuxième étape consiste à calculer les déformations intérieures de la géométrie produit. Il s'agit de déterminer les opérateurs auto-adjoints de la forme :

$$A = \sum_i a_i [D, b_i], \qquad (a_i, b_i) \in \mathcal{A}^2.$$

Comme $D = \partial_M \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F$, on peut décomposer A en somme de deux termes $A^{(1,0)}$ et $A^{(0,1)}$ provenant de la commutation avec $\partial_M \otimes 1$ et $\gamma_5 \otimes D_F$. Le calcul montre que le terme $A^{(0,1)}$ rassemble les bosons G et que $A^{(1,0)}$ redonne les champs de Higgs. En d'autres termes les bosons de jauge s'interprètent naturellement comme des déformations intérieures de la géométrie de $\mathcal{A}$.

La courbure de A :

$$\theta = dA + A^2 = \sum_i [D, b_i][D, a_i] + A^2,$$

redonne la partie bosonique de la fonctionnelle d'action $\mathcal{I}$, c.a.d. l'action de Yang-Mills :

$$⨍ \theta^2 ds^4 = \mathcal{I}_{YM} = \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{G\phi} + \mathcal{I}_\phi.$$

La partie fermionique de $\mathcal{I}$ est obtenue sous la forme :

$$\langle \psi, \tilde{D}\psi \rangle = \mathcal{I}_{\phi f} + \mathcal{I}_f,$$

où ψ est le vecteur de $\mathcal{H}_F$ donné par la somme des vecteurs associés aux particules et $\tilde{D}$ est l'opérateur associé à A :

$$\tilde{D} = D + A + JAJ^{-1}.$$

Enfin l'action d'Hilbert-Einstein peut s'écrire :

$$\mathcal{I}_E = \frac{1}{l_p^2} ⨍ ds^2.$$

On peut ainsi complétement exprimé la fonctionnelle $\mathcal{I}$ en termes non commutatifs :

$$\mathcal{I} = ⨍ \theta^2 ds^4 + \frac{1}{l_p^2} ⨍ ds^2 + \langle \psi, \tilde{D}\psi \rangle.$$

Néanmoins cette action dépend de la décomposition $\tilde{D} = D + A + JAJ^{-1}$ et ne satisfait pas au principe d'action spectral :

L'action physique ne dépend que du spectre de $\tilde{D}$.

Ce principe est plus fort que le principe d'invariance par difféomorphisme de la relativité générale et conduit à la fonctionnelle d'action suivante :

$$\mathcal{I} = \mathrm{Trace}(\varpi(\frac{\tilde{D}}{\Lambda})) + \langle \psi, \tilde{D}\psi \rangle,$$

où $\varpi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est paire et vaut 1 sur l'intervalle $[0, 1]$. Un calcul montre qu'on a :

$$\mathrm{Trace}(\varpi(\frac{\tilde{D}}{\Lambda})) = \mathcal{I}_E + \mathcal{I}_{YM} + \mathcal{I}_W + \mathcal{I}_C + \mathcal{I}_R + \mathrm{O}(\Lambda^{-\infty}),$$

où $\mathcal{I}_W$ est un terme de gravité de Weyl, $\mathcal{I}_C$ est un terme cosmologique et $\mathcal{I}_R$ est un terme renormalisable de la forme $\int_M r^2 \phi \sqrt{g} d^4x$.

Références

[Co1] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1995.

[Co2] A. Connes *Géométrie du point de vue spectrale et brisure spontannée de symétrie.* Séminaire Bourbaki, Juin 1996.

Troisième partie

Début de thèse

Interprétation du résidu de Wodzicki en termes de la singularité du noyau près de la diagonale

Le résidu de Wodzicki [Wo], ou résidu non commutatif, est une trace sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels (ΨDO) sur une variété compacte. Etant donné un ΨDO P d'ordre m sur une variété compacte M de dimension n et qui agit sur les sections d'un fibré $\mathcal{E}$, la fonction $z \to \mathrm{Trace}\, P\Delta^{-z}$ où Δ est une laplacien de M est définie et holomorphe pour $\Re z > \frac{1}{2}(m+n)$. Elle se prolonge en une fonction qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et qui a au plus des pôles simples sur $\mathbb{Z}$. Le résidu de Wodzicki de P est alors donné par :

$$\mathrm{res}\, P = 2\, \mathrm{Res}_{z=0}\, \mathrm{Trace}\, P\Delta^{-z}.$$

Cela définit une trace sur l'algèbre $\Psi^{\mathbb{Z}}/\Psi^{-\infty}$ et c'est même la seule à coefficient multiplicatif près si M est connexe et de dimension > 1.

Le résidu de Wodzicki a d'importantes implications en géométrie non commutative grâce à ses liens avec la trace de Dixmier [Co] et le théorème d'indice local de [CM]. Il a été étendu à d'autres situations comme l'algèbre de Boutet de Monvel pour les variétés à bord [FGLS] et le calcul transversalement elliptique pour les feuilletages [CM].

Pour le construire et montrer ses principales propriétés Wodzicki utilise le formalisme de la géométrie de cônes symplectiques [Wo]. Néanmoins comme dans [CM], en utilisant les résultats de [BG] et l'approche de [KV], on en a une description très simple en termes de la singularité du noyau près de la digonale. Plus précisèment la trace $\mathrm{tr}\, k_P(x,y)$ du noyau de P admet près de la diagonale un développement asymptotique de la forme

$$\mathrm{tr}\, k_P(x,y) = \sum_{j=-(m+n)}^{0} a_j(x, x-y) - c_P(x) \log|x-y| + \mathrm{O}(1),$$

où $a_j(x,y)$ est homogène de degré j en y et $c_P(x)$ est une densité intrinsèque sur M. Localement,

$$c_P(x) = (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \mathrm{tr}\, \sigma_{-n}\sigma_n(P)(x,\xi) d^{n-1}\xi,$$

où $\sigma_{-n}(P)(x,\xi)$ est le symbole de degré $-n$ de P et la sphère S^{n-1} est munie de sa métrique induite. On a alors :

$$\mathrm{res}\, P = \int_M c_P(x).$$

On présente ici cette description. Après avoir rappellé les principales définitions et propriètés des opérateurs pseudo-différentiels (section 1), on montre en utilisant l'approche de [BG] que le noyau d'un ΨDO a près de la diagonale une singularité logarithmique dont le coefficient définit une densité intrinsèque (cf. section 2). Dans la section suivante on construit le résidu de Wodzicki en s'inspirant de [KV]. Enfin on utilise cette description pour relier très simplement les résidus de Wodzicki des puissances d'un opérateur de Dirac sur une variété spinorielle aux coefficients de son développement de la chaleur de son carré. Ceci étend les réultats de [Ka] et [KW].

1 Opérateurs pseudo-différentiels

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{C}$. On appelle symbole sur $U \times \mathbb{R}^n$ d'ordre m une fonction $\sigma(x,\xi)$ lisse sur $U \times \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout couple de multi-indices α et β, on ait :

$$(1) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(x)(1+|\xi|)^{\Re m - |\beta|},$$

où $C_{\alpha\beta}(x)$ est localement bornée sur U. On demande de plus que $\sigma(x,\xi)$ admette un développement asymptotique,

$$\sigma(x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} \sigma_{m-j}(x,\xi), \qquad \sigma_k(x,\xi) \text{ homogène de degré } k \text{ en } \xi.$$

Ici le signe $\sim$ signifie que, pour tout entier $N > 0$ tout couple de multi-indices α et β, on a :

$$(2) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\sigma - \sum_{j<N} \sigma_{m-j})(x,\xi)| \leq C_{N\alpha\beta}(x)|\xi|^{\Re m - N - |\beta|}, \qquad \text{pour } |\xi| \geq 1,$$

où $C_{N\alpha\beta}(x)$ est une fonction localement bornée sur U.

Soit $S^m(U \times \mathbb{R}^n)$ l'espace des symboles d'ordre m. on rappelle que si $\sigma \in S^m(U \times \mathbb{R}^n)$, on note $\sigma(x,D)$ l'opérateur continu $C_c^\infty \to C^\infty(U)$ donné par :

$$\sigma(x,D) = (2\pi)^{-n} \int \sigma(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi, \qquad u \in C_c^\infty(U).$$

Ainsi pour $\sigma(x,\xi) = \sum a_\alpha(x)\xi^\alpha$, on obtient l'opérateur différentiel $\sum a_\alpha(x)D_x^\alpha$, $D_x = -i\partial_x$. Le noyau de $\sigma(x,D)$ est lisse en dehors de la diagonale et donné par $\check{\sigma}_{\xi\to y}(x, x-y)$ où $\check{\sigma}_{\xi\to y}$ est la transformée de Fourier inverse en la variable ξ de σ. En effet $\check{\sigma}_{\xi\to y}$ est lisse en dehors de l'origine car elle y est représentée par l'intégrale oscillante

$$(2\pi)^{-n} \int \sigma(x,\xi)e^{iy\xi}d\xi, \qquad y \neq 0,$$

qui est obtenue comme la valeur de l'intégrale absolument convergente

$$(2\pi)^{-n} \int (P_y^k\sigma)(\xi)e^{iy.\xi}d\xi,$$

où k est un entier $> \Re m + n$ et $P_y = P(y, D_\xi)$ est un opérateur différentiel tel que $P_y^t(e^{iy\xi}) = e^{iy\xi}$ (e.g. $P_y = \frac{1}{|y|^2}\sum y_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$).

Un opérateur pseudo-différentiel (ΨDO) d'ordre m sur U est un opérateur continu $P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ de la forme :

$$Pu(x) = \sigma(x,D) + R,$$

où $\sigma \in S^m(U \times \mathbb{R}^n)$ et R est un opérateur régularisant sur U. En particulier le noyau de P est lisse en dehors de la diagonale et donc déterminé par ces restrictions aux voisinages des points de U modulo des opérateur régularisants, i.e. que P est pseudo-local.

Si P_1 et P_2 sont des ΨDO d'ordres m_1 et m_2 dont l'un est proprement supporté, alors P_1P_2 est un ΨDO d'ordre $m_1 + m_2$ et de symbole :

$$\sigma(P_1)\#\sigma(P_2)(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \sigma(P_1)(x,\xi)\partial_x^\alpha \sigma(P_2)(x,\xi).$$

La notion de ΨDO est stable par difféomorphisme ce qui permet de l'étendre aux variétés et aux opérateurs agissant agissant sur les sections d'un fibré. Un ΨDO P d'ordre m surune variété M qui agit sur les sections d'un fibré $\mathcal{E}$ est un opétrateur continu $P : \Gamma_c(M,\mathcal{E}) \to \Gamma(M,\mathcal{E})$ qui dans toute carte locale trivialisante s'exprime comme une matrice de ΨDO d'ordre m sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On note $\Psi^m(M,\mathcal{E})$ l'espace des symboles d'ordre m. Si $P \in \Psi^m(M,\mathcal{E})$ le symbole dépend a priori de la carte locale sauf le terme principal dans son dévoloppement asymptotique qui peut être intrinsèquement défini comme une section $\sigma_m(P) \in \Gamma(T^*M \setminus 0, \pi_* \operatorname{End}\mathcal{E})$, où π est la submersion canonique de T^*M sur M. C'est le symbole principal de P.

On dit que $P \in \Psi^m(M,\mathcal{E})$ est elliptique si son symbole principal $\sigma_m(P)(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$. Dans ce cas il admet une parametrix appartenant $\Psi^{-m}(M,\mathcal{E})$, i.e. qu'il existe $Q \in \Psi^{-m}(M,\mathcal{E})$ tel que $PQ - I$ et $QP - I$ soient régularisants.

On montre qu tout $P \in \Psi^m(M,\mathcal{E})$ s'étend en un opérateur continu $H^s_c(M,\mathcal{E}) \to H^{s+\Re m}_{\text{loc}}(M,\mathcal{E})$. En particulier pour $\Re m \leq 0$ et M compacte, P s'étend en un opérateur borné de $L^2(M,\mathcal{E})$ et cet opérateur est compact pour $\Re m < 0$.

De plus si M est compacte, $\Re m > 0$ et P est elliptique son spectre est formé d'une suite de valeurs propres tendant en valeur absolue vers $+\infty$. S'il est en outre auto-adjoint (pour un produit scalaire sur $L^2(M,\mathcal{E})$ défini par des métriques données sur M et $\mathcal{E}$), il admet une base formée d'élèments de $\Gamma(M,\mathcal{E})$.

2 Singularité du noyau d'un ψDO près de la diagonale

Dans cette section on montre, en suivant l'approche de [BG] et de [CM], que le noyau d'un ΨDO admet près de la diagonale un développement asymptotique dont le coefficient du terme logarithmique est une densité intrinsèque.

Le point de départ est le problème de l'extension d'un symbole homogène *a priori* défini sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$ en une distribution homogène sur $\mathbb{R}^n$.

Précisons ce qu'on en entend par distribution homogène. L'action de $\mathbb{R}^*_+$ sur $\mathcal{S}$ par homothéties, $f_\lambda(\xi) = f(\lambda\xi)$, s'étend en une action $\tau \to \tau_\lambda$ sur $\mathcal{S}'$ définie par :

$$\langle \tau_\lambda, f\rangle = \lambda^{-n}\langle \tau, f_{\lambda^{-1}}\rangle, \qquad \text{pour } \lambda > 0, \text{ et } f \in \mathcal{S}.$$

On dit ainsi que $\tau \in \mathcal{S}'$ est homogène de degré m, $m \in \mathbb{C}$, si $\tau_\lambda = \lambda^m \tau$ pour tout $\lambda > 0$.

Lemme 1 *Soit $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ un symbole homogène de degré k, $k \in \mathbb{Z}$. Alors:*

i) Si $k > -n$, alors σ définit une distribution homogène.

ii) Si $k = -n$ il y a une unique obstruction à étendre σ en une distribution homogène,

$$c_\sigma = \int_{S^{n-1}} \sigma(\xi) d^{n-1}\xi, \tag{3}$$

où la sphère S^{n-1} est munie de sa métrique induite. Plus précisèment on peut au mieux étendre σ en une distribution tempérée τ vérifiant :

$$\tau_\lambda = \lambda^{-n}\tau + c_\sigma \lambda^{-n} \log \lambda \delta_0 \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4}$$

Démonstration. Si $k > -n$ le symbole σ est intégrable près de l'origine et à croissance tempérée près de l'infini. Il définit ainsi une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$ qui est l'unique distribution homogène le prolongeant.

Supposons maintenant que $k = -n$. Vu comme une distrubution sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$ le symbole σ s'étend en une forme linéaire continue

$$L(f) = \int f(\xi)\sigma(\xi)d\xi,$$

qui est définie sur le sous-espace fermé :

$$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathcal{S} \ ; \ f(0) = 0\}.$$

Grâce au théorème de Hanh-Banach on peut prolonger L en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$ et donc en une distribution tempérée. Une telle distribution appartient au sous-espace affine

$$E = \{\tau \in \mathcal{S}' \ ; \ \tau|_{\mathcal{S}_0} = L\},$$

dont la direction est celle de la droite engendrée par δ_0.

Maintenant soit $\lambda > 0$ et $\tau \in E$. Si f appartient à $\mathcal{S}_0$, alors aussi $f_{\lambda^{-1}}$ et on a :

$$\lambda^n \langle \tau_\lambda, f\rangle = \langle \tau, f_{\lambda^{-1}}\rangle = L(f_{\lambda^{-1}}).$$

Mais l'homogénéité de σ implique :

$$L(f_{\lambda^{-1}}) = \int f(\lambda^{-1}\xi)\sigma(\xi)d\xi = \int f(\xi)\sigma(\xi)d\xi = L(f).$$

Ainsi E est stable par l'endomorphisme $\tau \to \lambda^n \tau_\lambda$. Comme $\lambda^n(\delta_0)_\lambda = \delta_0$, on en déduit qu'il existe $c(\lambda) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\tau_\lambda = \lambda^{-n}\tau + c(\lambda)\lambda^{-n}\delta_0 \qquad \forall \tau \in E.$$

Pour déterminer $c(\lambda)$ il suffit de calculer $\tau_\lambda - \lambda^{-n}\tau$ pour un élèment particulier de E. On obtient une distribution $\tau \in E$ par exemple en considérant $\psi \in C_c^\infty([0,\infty))$ valant 1 près de 0 et en définissant τ par :

$$(5) \qquad \langle \tau, f\rangle = L(f - f(0)\psi(|.|)) = \int (f(\xi) - f(0)\psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Soit $f \in \mathcal{S}$ telle que $f(0) = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \langle \tau, f_{\lambda^{-1}}\rangle - \langle \tau, f\rangle \\ &= \int (f(\lambda^{-1}\xi) - \psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi - \int (f(\xi) - \psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi, \\ &= \int (\psi(\lambda|\xi|) - \psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi, \\ &= c_\sigma \int_0^\infty (\psi(\lambda\mu) - \psi(\mu))\frac{d\mu}{\mu}, \qquad c_\sigma = \int_{S^{n-1}} \sigma(\xi)d^{n-1}\xi. \end{aligned}$$

Mais comme

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty (\psi(\lambda\mu) - \psi(\mu))\frac{d\mu}{\mu} = \lambda\int_0^\infty \psi'(\lambda\mu)d\mu = \psi(0) = 1,$$

on voit que $c(\lambda) = c_\sigma \log\lambda$. Ainsi :

$$\tau_\lambda = \lambda^{-n}\tau + c_\sigma\lambda^{-n}\log\lambda\delta_0 \qquad \forall \tau \in E.$$

Il en résulte que si $c_\sigma = 0$, tout élèment de E est une distribution homogène sur $\mathbb{R}^n$ prolongeant le symbole σ.

Réciproquement soit $\tau \in \mathcal{S}'$ une distribution homogène prolongeant σ et soit $\tau' \in E$. Comme le support de $\tau - \tau'$ est inclus dans $\{0\}$, on a $\tau = \tau' + \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial^\alpha\delta_0$ avec $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$0 = \tau_\lambda - \lambda^{-n}\tau = c_\sigma\lambda^{-n}\log\lambda\delta_0 + \sum_{1\leq|\alpha|\leq N} a_\alpha\lambda^{-n}(\lambda^{|\alpha|} - 1)\partial^\alpha\delta_0,$$

ce qui implique que $c_\sigma = 0$ et que $\tau \in E$. Ainsi la condition $c_\sigma = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse étendre σ en une distribution homogène. Dans le cas général on peut au mieux l'étendre en une distribution vérifiant (4), ce qui est uniquement réalisé par les élèments de E. □

Maintenant soit $\tau \in \mathcal{S}'$. En écrivant

$$\tau = \varphi\tau + (1-\varphi)\tau,$$

où $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une fonction plateau valant 1 près de l'origine, on peut séparer son comportement infra-rouge au voisinage de l'origine, de son comportement ultra-violet près de l'infini. Ainsi comme la transformée de Fourier inverse d'une distribution à support compact est une fonction lisse à croissance tempérée, la régularité de la transformée de Fourier inverse de τ ne dépend que de son comportement ultra-violet, i.e. de $(1-\varphi)\tau$.

Gardant ceci à l'esprit et utilisant le lemme précédent on obtient :

Proposition 1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et P un ΨDO sur U d'ordre m, $m \in \mathbb{Z}$. Alors, près de la diagonale son noyau $k_P(x,x')$ a un comportement de la forme*

$$(6) \qquad k_P(x,x') = \sum_{-(m+n)\leq j\leq 0} a_j(x, x-x') - c_P(x)\log|x-x'| + \mathrm{O}(1),$$

avec $a_j(x,y) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ homogène de degré j en y et $c_P(x) \in C^\infty(U)$ donnée par

$$(7) \qquad c_P(x) = (2\pi)^{-n}\int_{S^{n-1}} \sigma_{-n}(x,\xi)d^{n-1}\xi,$$

où $\sigma_{-n}(x,\xi)$ est le symbole de degré $-n$ de P.

Démonstration. Soit $\sigma(x,\xi) \sim \sum_{j\leq k} \sigma_j(x,\xi)$ le symbole de P. Comme modulo un noyau C^∞ on a $k_P(x',x) = \check{\sigma}_{\xi\to y}(x, x-x')$, il suffit de regarder le comportement de $\check{\sigma}_{\xi\to y}(x,y)$ quand $y \to 0$.

Supposons dans un premier temps que $\sigma(x,\xi) = \sigma(\xi) \sim \sum_{j\leq k} \sigma_j(\xi)$ ne dépende pas de x. Pour $-n \leq j \leq m$ on étend le symbole $\sigma_j(\xi)$ en une distribution tempérée τ_j. Pour $j > -n$ cette extension est unique et homogène. Pour $j = -n$ on peut supposer que τ_{-n} vérifie (4). Maintenant la distribution

$$\tau = \sigma - \sum_{j=-n}^{m} \tau_j,$$

a le comportement ultra-violet d'un symbole intégrable, donc sa transformée de Fourier inverse est continue. Ainsi près de l'origine,

$$\check{\sigma}(y) = \sum_{j=-n}^{m} \check{\tau}_j(y) + \mathrm{O}(1).$$

La transformée de Fourier inverse de la partie infra-rouge de chaque distribution τ_j est une fonction lisse sur $\mathbb{R}^n$. Quant à la partie utra-violette c'est celle d'un symbole sur $U \times \mathbb{R}^n$ dont la transformée de Fourier inverse est lisse en dehors de l'origine et donc la distribution $\check{\tau}_j$ est lisse en dehors de l'origine.

D'autre part, on a $(\check{\tau})_\lambda = \lambda^{-n}(\tau_\lambda)^\vee$ pour $\tau \in \mathcal{S}'$ et $\lambda > 0$ Ainsi pour $j > -n$ la distribution $\check{\tau}_j$ est homogène de degré $-(n+j)$ tout comme la fonction qui la représente en dehors de l'origine.

Lorsque $j = -n$, par (4) qu'on a

$$\begin{aligned} \check{\tau}_{-n}(\lambda y) &= \lambda^{-n}[(\tau_{-n})_{\lambda^{-1}}]^\vee(y) \\ &= [\tau - c_{\sigma^{-n}} \log \lambda \delta_0] \vee (\xi) \\ &= \check{\tau}_{-n}(y) - (2\pi)^{-n} c_{\sigma^{-n}} \log \lambda. \end{aligned}$$

Prenant $\lambda = |y|^{-1}$, on en déduit que

$$\check{\tau}_{-n}(y) = \check{\tau}_{-n}(\frac{y}{|y|}) - (2\pi)^{-n} c_{\sigma^{-n}} \log |y|,$$

Il en résulte le développement asymptotique (6) dans le cas où le symbole ne dépend pas de x.

Lorsque le symbole $\sigma(x,\xi)$ dépend de x, on obtient un développement asymptotique où interviennent des familles $(\tau_x)_{x\in U}$ et $(\tau_{j,x})_{x\in U}$ de distributions tempérées. Leurs comportements ultra-violet sont ceux de symboles lisses sur $U \times \mathbb{R}^n$, ils donnent donc des fonctions lisses sur $U \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ et en ce qui concerne (τ_x) une fonction continue sur $U \times \mathbb{R}^n$ tout entier.

Quant aux parties infra-rouges, on a des applications lisses $U \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$, donc lorsque'on applique la transformée de Fourier inverse on obtient des fonctions lisses sur $U \times \mathbb{R}^n$. Pour $j > -n$, cela provient de ce que $\tau_{j,x}$ est la distribution définie par $\sigma_j(x,\xi)$ qui est un symbole homogène de degré intégrable près de l'origine,

$$\langle \varphi\tau_{j,x}, f\rangle = \int f(\xi)\varphi(\xi)\sigma_j(x,\xi)d\xi, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Lorsque $j = -n$ cela résulte de ce que grâce à (5) on peut définir $\tau_{-n,x}$ de telle sorte que $\varphi\tau_{-n,x}$ soit donnée par

$$\langle \varphi\tau_{-n,x}, f\rangle = \langle \tau_{-n,x}, \varphi f\rangle = \int \varphi(\xi)(f(\xi) - f(0))\sigma_{-n}(x,\xi)d\xi, f \in \mathcal{S}.$$

Ainsi l'application $x \to \varphi\tau_{-n,x}$ est lisse $U \to \mathcal{E}'$.

Il en résulte qu'on a

$$\check{\sigma}\xi \to y(x,y) = \sum_{-(m+n)\leq k\leq 0} a_k(x,y) - c_P(x)\log|y| + R(x,y), \qquad y \neq 0,$$

où $a_k(x,y)$ est une fonction lisse sur $U \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ homogène de degré k en y, $c_P(x)$ est donné par (7) et $R(x,y)$ est une fonction continue sur $U \times \mathbb{R}^n$, ce qui donne le développement asymptotique. □

Théorème 1 *Soit M une variété de dimension n et P un ΨDO sur M d'ordre m, $m \in \mathbb{Z}$, agissant sur les sections d'un fibré $\mathcal{E}$ au-dessus de M. Alors, dans des coordonnées locales trivialisantes, la trace $\operatorname{tr} k_P(x,x')$ du noyau de P a un comportement près de la diagonale de la forme*

$$\operatorname{tr} k_P(x,x') = \sum_{j=-(m+n)}^{0} a_k(x, x-x') - c_P(x)\log|x-x'| + \mathrm{O}(1), \tag{8}$$

où $a_k(x,y)$ *est une fonction homogène de degré* k *en* y, *et* $c_P(x)$ *est une densité intrinsèque sur* M *localement donnée par*

$$(9) \qquad c_P(x) = (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \operatorname{tr} \sigma_{-n}(x,\xi))d^{n-1}\xi,$$

où $\sigma_{-n}(x,\xi)$ *est le symbole de degré* $-n$ *de* P.

Démonstration. Grâce à la proposition 1 on a un développement asymptotique de la forme (8). L'essentiel ici est de montrer le caractère intrinsèque du coeeficient $c_P(x)$, i.e. l'invariance vis à vis d'un changement de carte locale trivialisante.

Supposons tout d'abord que $\mathcal{E}$ est un fibré en droites trivial et que P est un ΨDO scalaire. Examinons l'effet d'un changement de carte locale $y = \phi^{-1}(x)$,

$$k_P(x,x') \xrightarrow{\phi^*} k_{\phi^* P}(y,y') = |J_\phi(y')| k_P(\phi(y),\phi(y')).$$

Alors :

$$k_{\phi^* P}(y,y') = \sum_{-(m+n)}^{0} |J_\phi(y')| a_k(\phi(y),\phi(y)-\phi(y')) - |J_\phi(y')| c_P(\phi(y)) \log|\phi(y)-\phi(y')| + \mathrm{O}(1).$$

Mais la fonction $a_k(\phi(y),.)$ est lisse en dehors de l'origine, donc en faisant un développement de Taylor on voit que la fonction

$$|J_\phi(y')| a_k(\phi(y),\phi(y)-\phi(y')) = |J_\phi(y')| |y-y'|^k a_j(\phi(y),\phi'(y).\frac{y-y'}{|y-y'|}+\dots),$$

ne donne que des termes homogènes ou continus. La seule contribution au terme logarithmique provient donc nécessairement de

$$|J_\phi(y')| c_P(\phi(y)) \log|\phi(y)-\phi(y')| = |J_\phi(y)| c_P(\phi(y)) \log|y-y'| + \mathrm{O}(1).$$

Ainsi

$$c_{\phi^* P}(y) = |J_\phi(y)| c_P(\phi(y)), \qquad y \in U.$$

Ceci montre que $c_P(x)$ se transforme comme une densité. Les densités étant des objets locaux formant un faisceau il en résulte que $c_P(x)$ peut être globalement défini sur M en une densité qui est intrinsèque.

Lorsque P agit sur les sections d'un fibré il faut regarder l'effet d'un changement de trivialisation, ce qui conjugue l'action de P fibre par fibre par une matrice de transfert lisse $A(x)$,

$$k_P(x,x') \longrightarrow A(x)^{-1} k_P(x,x') A(x').$$

Lorsque x' tend vers x, on peut développer $A(x')$ à l'aide de la formule de Taylor. Mais comme on ne s'interesse qu'au terme logarithmique dans le développement asymptotique du noyau, seul compte le terme d'ordre 0 dans le développement de Taylor de $A(x')$. Ainsi $\operatorname{tr} A(x)^{-1} k_P(x,x') A(x')$ a la même singularité logarithmique près de la diagonale que

$$\operatorname{tr} A(x)^{-1} k_P(x,x') A(x) = \operatorname{tr} k_P(x,x').$$

Il en résulte que le coefficient $c_P(x)$ ne dépend pas du choix de la trivialisition locale. Ensuite de même que dans le cas scalaire on montre que $c_P(x)$ défini une densité intrinsèque sur M. $\square$

Remarque. Supposons que la variété M soit munie d'une métrique riemannienne et soit $d(x,x')$ la distance géodésique. Localement il existe $c > 0$ tel que

$$c^{-1}|x-x'| \le d(x,x') \le c|x-x'|,$$

donc dans le développement asymptotique (8) on peut remplacer le terme $\log|x-x'|$ par $\log d(x,x')$. Autrement dit :

$$\operatorname{tr} k_P(x,x') = \sum_{j=-(m+n)}^{0} a_k(x,x-x') - c_P(x) d(x,x') + \mathrm{O}(1),$$

où $a_k(x,y)$ et $c_P(x)$ sont comme précédemment.

3 Construction du résidu de Wodzicki

Lemme 2 *Soit $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ homogène de degré m, $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Alors, σ s'étend de manière unique en une distribution homogène.*

Démonstration. Si $\Re m > -n$, alors $\sigma(\xi)$ est intégrable près de l'origine et définit ainsi une distribution tempérée qui est l'unique distribution homogène le prolongeant.

Dans le cas général on considère un entier $k > \Re m + n - 1$ et une fonction $\psi \in C_c([0, \infty))$ valant 1 près de de 0. On étend alors σ en une distribution tempérée τ en posant :

(10)
$$\langle \tau, f \rangle = \int [f(\xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)\psi(|\xi|)]\sigma(\xi) d\xi, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Soit $\lambda > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \tau_\lambda, f \rangle - \lambda^m \langle \tau, f \rangle &= \lambda^{-n} \int (f(\lambda^{-1}\xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(\lambda^{-1}\xi)^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)\psi(|\xi|))\sigma(\xi) d\xi \\
&+ \lambda^m \int (f(\xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)\psi(|\xi|))\sigma(\xi) d\xi, \\
&= \lambda^m \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} \int (\psi(|\xi|) - \psi(\lambda(|\xi|))\xi^\alpha \sigma(\xi) d\xi, \\
&= \lambda^m \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} c_{\xi^\alpha \sigma} \rho_\alpha(\lambda),
\end{aligned}$$

avec

$$c_{\xi^\alpha \sigma} = \int_{S^{n-1}} \xi^\alpha \sigma(\xi) d\xi, \qquad \rho_\alpha(\lambda) = \int_0^\infty \mu^{|\alpha|+q+n}(\psi(\mu) - \psi(\lambda\mu)) \frac{d\mu}{\mu}.$$

On a $\rho_\alpha(1) = 0$ et

$$\frac{d}{d\lambda}\rho_\alpha(\lambda) = -\int \mu^{|\alpha|+m+n} \psi'(\lambda\mu) d\mu = -\lambda^{|\alpha|+m+n-1} \int \mu^{|\alpha|+m+n} \psi'(\mu) d\mu.$$

Ainsi τ est homogène si, et seulement si, on a

(11)
$$\int_0^\infty \mu^a \psi'(\mu) d\mu = 0 \qquad \text{pour } a = m + n, \ldots, m + n + k.$$

On est donc ramené à chercher une fonction ψ vérifiant la condition ci-dessus. On la cherche sous la forme

$$\psi(\mu) = h(\log \mu),$$

avec $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 près de $-\infty$ et 0 près de $+\infty$. Dans ce cas la condition (11) devient

$$0 = \int_0^{+\infty} \mu^a \frac{d}{d\mu}(h(\log \mu)) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{as} h'(s) ds, \qquad a = m + n, \ldots, m + n + k.$$

Maintenant si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$\int e^{at}(\frac{d}{dt} + a)g(t) dt = \int \frac{d}{dt}(e^{at} g(t)) dt = 0,$$

$$\int (\frac{d}{dt} + a)g(t) dt = a \int g(t) dt.$$

Comme $(m + n), \ldots, (m + n + k)$ sont non nuls, on voit que si $\int g(t)dt = 1$, la condition (11) est vérifiée par $\psi(\mu) = h(\log \mu)$ si $h'(s)$ est donnée par

(12)
$$h'(s) = (\prod_{a=m+n}^{m+n+k} (a^{-1} \frac{d}{dt} + 1) g(s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas la distribution τ donnée par (10) est une extension homogène de σ.

Enfin, si τ' est une autre distribution homogène prolongeant σ, alors $\tau - \tau'$ est supportée dans $\{0\}$ et homogène de degré non entier. Or ceci n'est possible que si $\tau' = \tau$, donc τ est l'unique extension homogène de σ. □

Définition 1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $\sigma : \Omega \to S^*(U \times \mathbb{R}^n)$ est holomorphe quand :*

i) Pour tout $x \in U$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $z \mapsto \sigma(z)(x,\xi)$ est holomorphe sur Ω.

ii) L'ordre $m(z)$ de $\sigma(z)$ est une fonction holomorphe sur Ω.

iii) Les bornes (1) et (2) du développement asymptotique $\sigma(z) \sim \sum \sigma_{m(z)-j}(z)$ sont localement uniformes par rapport à z.

Soit $\sigma : \Omega \to S^*(U \times \mathbb{R}^n)$ holomorphe. Ponctuellement on a :

$$\sigma_{m(z)-j}(z)(x,\xi) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{j-m(z)}[\sigma(z)(x,\lambda\xi) - \sum_{l<j} \sigma_{m(z)-l}(z)(x,\lambda\xi)], \qquad j \geq 0.$$

Mais grâce aux axiomes i) à iii) les termes ci-dessus sont holomorphes et convergent uniformèment par rapport aux paramètres. On en déduit que $\sigma_{m(z)-j}(z)$ dépend holormorphiquement de z, i.e. que l'application $z \to \sigma_{m(z)-j}(z)$ est holomorphe de Ω dans $C^\infty(U \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$.

On peut de plus dériver le développement asymptotique $\sigma(z) \sim \sum \sigma_{m(z)-j}(z)$. Ainsi $\partial_z \sigma(z)(x,\xi)$ est un symbole classique sur $U \times \mathbb{R}^n$ et on a :

$$\partial_z \sigma(z)(x,\xi) \sim \sum_{j \geq 0} \partial_z \sigma_{m(z)-j}(z)(x,\xi).$$

Définition 2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que $P : \Omega \to \Psi^*(U)$ est holomorphe si $P(z)$ se met sous la forme*

$$P(z) = \sigma(z)(x,D) + R(z),$$

où $\sigma : \Omega \to S^*(U \times \mathbb{R}^n)$ et $R : \Omega \to C^\infty(U \times U)$ sont des applications holomorphes.

On sait que les théorèmes classiques du calcul pseudo-différentiel tels que l'invariance par difféomorphisme et la stabilité par le produit s'étendent sans difficulté aux ΨDO avec paramètre. Les raisons sont d'une part qu'au niveau des symboles et des noyaux ces opérations sont continues. D'autre part les symboles et les noyaux qui résultent de ces opérations sont donnés par des intégrales qui une fois régularisées convergent dans l'espace associé au paramètre (e.g. $\mathrm{Hol}(\Omega)$).

Ainsi on peut définir les applications holomorphes à valeurs dans l'espace $\Psi^*(M,\mathcal{E})$ des ΨDO sur une variété M agissant sur les sections d'un fibré $\mathcal{E}$ et lorsque M est compacte le produit de $\Psi^*(M,\mathcal{E})$ est holomorphe.

Un exemple d'application holomorphe à valeurs dans $\Psi(M,\mathcal{E})$ lorsque M est compacte est donné par les puissances complexes d'un ΨDO elliptique [Se].

Soit $Q \in \Psi^*(M,\mathcal{E})$ d'ordre m, $\Re m > 0$, elliptique et dont le spectre est discret et disjoint du demi-axe réel négatif. On considère une courbe Γ ne rencontrant pas le spectre de Q et qui part de l'∞, longe le demi-axe réel négatif jusqu'à l'origine qu'elle entoure pour revenir ensuite vers l'∞. Lorsque $\Re s < 0$ on peut alors définir Q^s, au moins en tant qu'opérateur borné de $L^2(M,\mathcal{E})$, par l'intégrale curviligne

$$Q^s = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \lambda^s (Q-\lambda)^{-1} d\lambda.$$

En fait Q^s est un ΨDO sur M d'ordre ms. Localement la résolvante $(Q-\lambda)^{-1}$ s'écrit :

$$(Q-\lambda)^{-1} = q(\lambda,x,D) + R(\lambda).$$

Ici $R(\lambda)$ est un opérateur régularisant dont le noyau est un $\mathrm{O}(\lambda^2)$ pour la topologie C^∞ et $q(\lambda,x,\xi)$ est un symbole lisse par rapport à λ admettant un développement asymptotique de la forme :

$$q(\lambda,x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} q_{-m-j}(\lambda,x,\xi), \quad q_k(\lambda,x,\xi) \text{homogène de degré } k \text{ en } (\lambda^{1/m},\xi).$$

Ainsi lorsqu'on intégre par rapport à λ on obtient une application holomorphe sur $\{\Re s < 0\}$ à valeurs dans $\Psi^*(M,\mathcal{E})$. C'est un semi-groupe et grâce à l'holomorphie du produit de $\Psi^*(M,\mathcal{E})$ il s'etend en un groupe à 1-paramétre holomorphe sur $\mathbb{C}$, $s \to Q^s$, qui contient $Q^0 = I$ et $Q^1 = Q$.

Maintenant sur l'espace $S^{\text{int}}(\mathbb{R}^n)$ des symboles $\sigma(\xi) \sim \sum \sigma_{m-j}(\xi)$ intégrables sur $\mathbb{R}^n$, on considère la fonctionnelle holomorphe

$$L(\sigma) = \check{\sigma}(0) = (2\pi)^{-n} \int \sigma(\xi) d\xi.$$

Lemme 3 *La fonctionnelle L ci-dessus a un unique prolongement holomorphe $\tilde{L}$ sur l'espace $S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$ des symboles d'ordre non entier. Sa valeur en $\sigma(\xi) \sim \sum \sigma_{m-j}(\xi)$, $m \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, est donnée par*

$$\tilde{L}(\sigma) = (\sigma - \sum_{j\leq N} \tau_{m-j})^\vee(0) = (2\pi)^{-n} \int (\sigma - \sum_{j\leq N} \tau_{m-j})(\xi) d\xi, \qquad \sigma \in S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}},$$

où N est un entier $\geq \Re m + n$, dont la valeur est indifférente, et τ_{m-j} est l'unique distribution homogène prolongeant σ_{m-j} donnée par le lemme 2. De plus, si $\sigma : \mathbb{C} \to S^*(\mathbb{R}^n)$ est holomorphe et que $\operatorname{ord}\sigma(z) = z$ pour tout z, alors $\tilde{L}(\sigma(z))$ est méromorphe sur $\mathbb{Z}$ avec au plus des pôles simples et des résidus donnés par :

$$\operatorname{Res}_{z=p} \tilde{L}(\sigma(z)) = -(2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \sigma_{-n}(p)(\xi) d\xi, \qquad p \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Démonstration. Soit $\sigma \in S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma \sim \sum \sigma_{m-j}$. Par le lemme 2 il existe une unique distribution homogène τ_{m-j} prolongeant σ_{m-j}. Soit N un entier $> \Re m + n$. Alors, la distribution

$$\tau = \sigma - \sum_{j<N} \tau_{m-j},$$

a le comportement ultra-violet d'un symbole intégrable. Sa transformée de Fourier inverse est continue et on peut donc définir $\check{\tau}(0)$:

$$\check{\tau}(0) = (\sigma - \sum_{j\leq N} \tau_{m-j})^\vee(0) = (2\pi)^{-n} \int (\sigma - \sum_{j\leq N} \tau_{m-j})(\xi) d\xi.$$

Maintenant si $\Re m - j < -n$, la distribution τ_{m-j} a un comportement utra-violet intégrable, et $\check{\tau}_{m-j}$ est continue. Or $\check{\tau}_{m-j}$ est homogène, donc certainement $\check{\tau}_{m-j}(0) = 0$. Ainsi la valeur de N n'a aucune incidence sur celle de $\check{\tau}(0)$. On peut donc étendre L sur $S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$ en posant :

$$\tilde{L}(\sigma) = (\sigma - \sum_{j\leq N} \tau_{m-j})^\vee(0) = (2\pi)^{-n} \int (\sigma - \sum_{j\leq N} \tau_{m-j})(\xi) d\xi, \qquad \sigma \in S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n).$$

Il reste à vérifier que $\tilde{L}$ est holmorphe. Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma : \Omega \to S^*(U \times \mathbb{R}^n)$ holomorphe, $\sigma(z) \sim \sum \sigma_{m(z)-j}(z)$. On peut supposer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait

$$p - 1 < \Re m(z) < p + 1, \qquad z \in \Omega.$$

Dans ce cas on peut choisir $N = n + p$ dans la définition de $\tilde{L}(\sigma(z))$. Mais le comportement ultra-violet de

$$\tau(z) = \sigma(z) - \sum_{j<n+p} \tau_{m(z)-j}(z),$$

est celui d'un symbole $\tilde{\sigma}(z) \int S^{\text{int}}$ qui dépend holomorphiquement de z, donc il suffit de regarder le comportement infra-rouge des $\tau_{m(z)-j}(z)$. Il résulte de (10) et (12)) que $z \mapsto \tau_{m(z)-j}(z)$ est un holomorphe de Ω dans $\mathcal{S}'$, donc certainement la fonction

$$(\varphi \tau_{m(z)-j})^\vee(0) = (2\pi)^{-n} \langle \tau_{m(z)-j}, \varphi \rangle,$$

est holomorphe. Ainsi $\tilde{L}$ est un prolongement holomorphe de L sur $S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$. C'est le seul car tout élèment de $S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$ peut être connecté à $S^{\text{int}}(\mathbb{R}^n)$ par un chemin holomorphe à l'intérieur de $S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$.

Ensuite la forme de $h'(s)$ dans (12) montre que si $m(z)$ est holomorphe près de $m(z) = p$, alors $\tilde{L}(\sigma(z))$ est méromorphe près de $m(z) = p$.

Investissons la singularité près de $m(z) = p$ lorsque $m(z) = z$. On se place dans le demi-plan $\{\Re z < p\}$. Comme la partie ultra-violette de $\tau(z)$ donne un terme holomorphe près de $z = p$, il suffit de regarder le comportement infra-rouge des $\tau_{z-j}(z)$.

Maintenant pour $0 \leq j \leq n + m$ et $\Re z < p$, le symbole $\sigma_{z-j}(z)(\xi)$ est intégrable près de l'origine et définit ainsi l'unique distribution homogène le prolongeant. Aussi l'éventuelle singularité près de $z = p$ provient des intégrales

$$-(2\pi)^{-n} \int_{|\xi|\leq 1} \sigma_{z-j}(z)(\xi) d\xi = \frac{-(2\pi)^{-n}}{z - j + n} \int_{S^{n-1}} \sigma_{z-j}(z)(\xi) d\xi.$$

On a un terme singulier seulement pour $j = n + p$ et dans ce cas c'est un pôle simple dont le résidu est égal à :

$$-(2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \sigma_{-n}(p)(\xi) d\xi.$$

Ainsi lorsque $m(z) = z$ la fonction $\tilde{L}(\sigma(z))$ a au plus des pôles simples près de $\mathbb{Z}$ avec des résidus qui sont donnés par (13). $\square$

Dans toute la suite on désigne par M une variété compacte de dimension n et par $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel au-dessus de M.

Théorème 2 *Soit $D \in \Psi^*(M, \mathcal{E})$ elliptique d'ordre 1. Alors :*

1) *La fonctionnelle $P \to \operatorname{Trace} P$ sur $\Psi^{\text{int}} = \{P \in \Psi^*(M, \mathcal{E})\ ;\ \Re \operatorname{ord} P < -n\}$ a un unique prolongement analytique $P \to \operatorname{TR} P$ sur $\Psi^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$.*

2) *Pour tout $P \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$ la fonction $z \mapsto \operatorname{TR} P|D|^{-z}$ a au plus des pôles simples sur $\mathbb{Z}$. En $z = 0$ son résidu est donné par*

$$\operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P|D|^{-z} = \int_M c_P(x), \tag{14}$$

où $c_P(x)$ est la densité qui apparait dans (8) comme le coefficient de la singularité logarithmique du noyau de P près de la diagonale.

3) *La formule (14) définit une trace sur l'algèbre $\Psi^{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$,*

$$\operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P_1 P_2 |D|^{-z} = \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P_2 P_1 |D|^{-z}, \qquad P_j \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E}).$$

Démonstration. Soit $P \in \Psi^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$. Alors l'application $z \mapsto P|D|^{-z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et connecte P à $\Psi^{\text{int}}(M, \mathcal{E})$ dans $\Psi^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$ de sorte qu'un prolongement analytique de $\operatorname{Trace}_{\Psi^{\text{int}}}$ est nécessairement unique.

Comme Trace est holomorphe sur les opérateurs régularisants, on peut à l'aide d'une partition de l'unité se contenter de travailler dans une carte locale trivialisante avec des symboles scalaires compactement supportés avec x. Plus précisèment il suffit d'étudier, pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C^\infty(U)$, la fonctionnelle

$$L_\varphi(\sigma) = \operatorname{Trace} \varphi\sigma(x, D), \qquad \sigma \in S^{\text{int}}(U \times \mathbb{R}^n).$$

Si $\sigma \in S^{\text{int}}(U \times \mathbb{R}^n)$ et $P = \sigma(x, D)$, on a :

$$\operatorname{Trace} \varphi P = \int \varphi(x) k_P(x, x) dx = (2\pi)^{-n} \int \varphi(x)\sigma(x, \xi) d\xi dx = \int \varphi(x) L(\sigma(x, .)) dx.$$

On obtient ainsi un prolongement de L_φ sur $S^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(U \times \mathbb{R}^n)$ à l'aide de la fonctionnelle $\tilde{L}$ du lemme précédent :

$$\tilde{L_\varphi}(\sigma) = \int \varphi(x)\tilde{L}(\sigma(x, .)) dx, \qquad \sigma \in S^{\text{int}}(U \times \mathbb{R}^n).$$

Maintenant si $\sigma(x, \xi) = \sigma(z)(x, \xi)$ dépend holomorphiquement de z, on a des bornes uniformes uniformes par rapport à x et les résultats du lemme 2 pour $\tilde{L}(\sigma(z)(x, .))$ sont uniformes par rapport à x et s'etendent à $\tilde{L_\varphi}(\sigma(z))$.

Ainsi $\tilde{L_\varphi}(\sigma(z))$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Si $\operatorname{ord}\sigma(z) = z$, alors $\tilde{L_\varphi}(\sigma(z))$ a au plus des pôles simples sur $\mathbb{Z}$ et son résidu en $z = k$, $k \in \mathbb{Z}$, est donné par :

$$\operatorname{Res}_{z=k} \tilde{L_\varphi}(\sigma(z)) = -(2\pi)^{-n} \int \int_{S^{n-1}} \varphi(x)\sigma_{-n}(k)(x,\xi)d\xi dx = \int \varphi(x) c_{P_k}(x)dx.$$

La dernière égalité résultant de (9) pour $P = P_k = \sigma_k(x,\xi)$.

Recollant les cartes locales trivialisantes et tenant compte des opérateurs régularisants, on obtient un prolongement holomorphe de Trace sur $\Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$. Ce prolongement est unique et on le note TR. De plus si $P : \mathbb{C} \to \Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$ est holomorphe et telle que $\operatorname{ord} P(z) = z$, alors $\operatorname{TR} P(z)$ a au-plus des pôles sur $\mathbb{Z}$ dont les résidus sont donnés par :

$$\operatorname{Res}_{z=k} \operatorname{TR} P(z) = -\int_M c_{P(k)}(x), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

On obtient ainsi le 2) en prenant $P(z) = P|D|^{-z}$.

Enfin soit P_1 et P_2 dans $\Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$. Comme TR est une trace sur $\Psi^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$ et que (15) ne dépend que de la valeur de $P(z)$ en $z = k$, on a :

$$\operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P_1P_2|D|^{-z} = \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P_2|D|^{-z}P_1 = \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P_2P_1|D|^{-z}.$$

Par conséquent la formule (14) définit une trace sur $\Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$. □

Définition 3 *Soit M une varité compacte de dimension n et $\mathcal{E}$ un fibré au-dessus de M. On appelle résidu de Wodzicki et on note* res *la trace sur $\Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$ définie par*

$$\operatorname{res} P = \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} P|D|^{-z}, \qquad P \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E}),$$

où $D \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$ est elliptique d'ordre 1.

Proposition 2 *Soit M une varité compacte de dimension n et $\mathcal{E}$ un fibré au-dessus de M. Alors :*

1) Le résidu de Wodzicki est invariant par difféomorphisme, c.a.d. que si $\phi : M \to M'$ est un difféomorphisme on a :

$$\operatorname{res}_M P = \operatorname{res}_{M'} \phi_* P \qquad \textit{pour tout } P \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E}).$$

2) Le résidu de Wodzicki est l'unique trace sur l'algèbre $\Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$ à coefficient multiplicatif près si M est connexe et de dimension > 1.

3) Soit $P \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E})$ d'ordre $\leq -n$. Alors P est un opérateur mesurable au sens de [Co1] *et on a l'égalité :*

$$⨍ P = \frac{1}{n} \operatorname{res} P.$$

Démonstration. Le 1) résulte de l'invariance par diffmorphisme de la densité $c_P(x)$. Le 2) a été démontré par Wodzicki [Wo] et Brylinski-Getzler [BGe] (voir aussi [FGLS]). Le 3) est le contenu du théorème 1 de [Co2].

Remarque. Dans la définition du résidu de Wodzicki on aurait pu remplacer l'opérateur $|D|$ par n'importe quel ΨDO elliptique Q satisfaisant aux hypothèses de Seeley, quitte à multiplier par l'ordre de Q, car on a :

$$\operatorname{ord} Q. \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{TR} PQ^{-z} = \int_M c_P(x) = \operatorname{res} P, \qquad \forall P \in \Psi^{\mathbb{Z}}(M,\mathcal{E}).$$

4 Résidu de Wodzicki et développement de la chaleur

Soit M une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension n paire, $\mathcal{E}$ un module de Clifford sur M et D l'opérateur de Dirac sur M attaché à une connexion de Clifford unitaire sur $\mathcal{E}$. On sait [LM] que pour $t > 0$ l'opérateur e^{-tD^2} est régularisant et que son noyau $k_t(x,y)$ admet un développement asymptotique pour t petit :

$$k_t(x,y) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sqrt{g(x)} \sum_{j\geq 0} k_j(x,y) t^j e^{\frac{-d(x,y)^2}{4t}},$$

où $d(x,y)$ est la distance géodésique et $k_j(x,y)$ est une section lisse de $\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}$. Alors :

$$\mathrm{Trace}(e^{-tD^2}) \sim_{t\to 0^+} \sum_{j\geq 0} t^{\frac{j-n}{2}} a_j(D^2),$$

avec :

$$a_{2j}(D^2) = (4\pi)^{-n/2}\int_M \mathrm{tr}\, k_j(x,x)\sqrt{g(x)}dx, \qquad a_{2j+1}(D^2)=0, \qquad j\geq 0.$$

Maintenant soit un entier p, $0\leq p\leq n$, et calculons le résidu de Wodzicki de D^{-p} en déterminant le coefficient de $-\log d(x,y)$ dans le développement asymptotique de la trace de son noyau près de la diagonale.

Comme le projecteur orthogonal sur son noyau est régularisant, on peut supposer que D est inversible. Par la formule de Mellin on obtient

$$D^{-p} = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}} e^{-tD^2}\frac{dt}{t}.$$

Ceci-dit pour tout $T>0$, la fonction $x\mapsto \int_T^\infty t^{\frac{p}{2}}e^{-tx}\frac{dt}{t}$ est dans la classe de Schwartz, donc l'opérateur $\int_T^\infty t^{\frac{p}{2}}e^{-tD^2}\frac{dt}{t}$ est régularisant. On peut ainsi remplacer D^{-p} par

$$D_T^{-p} = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})}\int_0^T t^{\frac{p}{2}} e^{-tD^2}\frac{dt}{t}, \qquad T>0.$$

On choisit T assez petit pour qu'il existe $C>0$ tel que pour $0<t\leq T$ et x et y assez proches on ait :

$$|k_t(x,y) - (4\pi t)^{-n/2}\sum_{j=0}^{(n-p)/2} t^j\sqrt{g(x)}k_j(x,y)e^{\frac{-d(x,y)^2}{4t}}| \leq Ct^{-\frac{p}{2}}e^{\frac{-d(x,y)^2}{4t}}.$$

Ainsi pour x et y distincts et assez proches on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{p}{2})\,\mathrm{tr}\,k_{D_T^{\frac{p}{2}}}(x,y) &= \int_0^T t^{\frac{p}{2}}\,\mathrm{tr}\,k_t(x,y)\frac{dt}{t},\\
&= (4\pi)^{\frac{-n}{2}}\sqrt{g(x)}\sum_{j=0}^{(n-p)/2}\mathrm{tr}\,k_j(x,y)\int_0^T t^{j+\frac{p-n}{2}}e^{\frac{-d(x,y)^2}{4t}}\frac{dt}{t} + \mathrm{O}(\int_0^T e^{\frac{-d(x,y)^2}{4t}}dt).
\end{aligned}$$

Maintenant pour m entier et $\mu>0$ on a :

$$\int_0^T t^m e^{\frac{-\mu}{t}}\frac{dt}{t} = \mu^m\int_{\mu T}^\infty t^{-m}e^{-t}\frac{dt}{t}\ \begin{array}{ll} = \text{polyn. en } \frac{1}{\mu} + \mathrm{O}(1) & \text{si } m<0,\\ = -\log\mu + \mathrm{O}(1) & \text{si } m=0,\\ = \mathrm{O}(1) & \text{si } m>0.\end{array}$$

Il en résulte que la singularité logarithmique de $\Gamma(\frac{p}{2})\,\mathrm{tr}\,k_{D_T^{\frac{p}{2}}}(x,y)$ provient de

$$\begin{aligned}
&(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\sqrt{g(x)}\,\mathrm{tr}\,k_{\frac{n-p}{2}}(x,y)\int_0^T e^{\frac{-d(x,y)^2}{4t}}\frac{dt}{t}\\
&= (4\pi)^{\frac{-n}{2}}\sqrt{g(x)}\,\mathrm{tr}\,k_{\frac{n-p}{2}}(x,y)(-\log\frac{d(x,y)^2}{4} + \mathrm{O}(1))\\
&= -2(4\pi)^{\frac{-n}{2}}\sqrt{g(x)}\,\mathrm{tr}\,k_{\frac{n-p}{2}}(x,x)\log d(x,y) + \mathrm{O}(1).
\end{aligned}$$

Ainsi le résidu de Wodzicki de $D_T^{\frac{p}{2}}$, et donc celui de D^p, est égal à :

$$2\frac{(4\pi)^{\frac{-n}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})}\int_M \mathrm{tr}\,k_{\frac{n-p}{2}}(x,x)\sqrt{g(x)}dx = \frac{2}{\Gamma(\frac{p}{2})}a_{n-p}(D^2).$$

On a par conséquent démontré le théorème suivant :

Théorème 3 *Soit M une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension n paire, $\mathcal{E}$ un module de Clifford sur M et D l'opérateur de Dirac sur M attaché à une connexion de Clifford unitaire sur $\mathcal{E}$. Alors :*

$$\mathrm{res}\, D^{-p} = \frac{2}{\Gamma(\frac{p}{2})}a_{n-p}(D^2) = \frac{2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{p}{2})}\int_M \mathrm{tr}\,k_{\frac{n-p}{2}}(x,x)\sqrt{g(x)}dx, \qquad 0\leq p\leq n,$$

où $a_{n-p}(D^2)$ et $k_{\frac{n-p}{2}}(x,x)$ sont les coefficients de t^{-p} dans les développements de la chaleur de la trace et du noyau de e^{-tD^2}.

Remarque. Les calculs précédents sont en fait valables pour n'importe quel opérateur elliptique d'ordre > 0 dont le symbole principal est défini positif.

Si $p = n$, on obtient :

$$\operatorname{res} D^{-n} = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} a_0(D^2) = \frac{2 \operatorname{rg} \mathcal{E}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{p}{2})} \operatorname{vol} M.$$

Mais comme $\operatorname{Trace} e^{-tD^2} \sim_{t \to 0^+} t^{\frac{-n}{2}} a_0(D^2)$, il résulte du théorème taubérien de Hardy-Littlewood (cf.[CM], appendice) que D^{-n} est un opérateur mesurable et que sa trace de Dixmier est égale à :

$$\frac{1}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} a_0(D^2) = \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

En particulier $⨍ D^{-n} = \frac{1}{n} \operatorname{res} D^{-n}$ et on retrouve la proposition 2.3) dans ce cas.

Supposons que $D = \partial_M$ soit l'opérateur de Dirac qui agit sur les sections du fibré des spineurs de M. Comme

$$a_2(\partial_M^2) = \frac{-(4\pi)^{-n/2}}{12} \int_M r_M(x) \sqrt{g(x)} dx,$$

où r_M désigne la courbure scalaire de M pour la métrique g, on voit que

$$\operatorname{res}(\partial_M^{-n+2}) = -c_n \int_M r_M(x) \sqrt{g(x)} dx, \qquad c_n = \frac{1}{24} \frac{n(n-2)}{(2\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

Ainsi le résidu de ∂_M^{-n+2} redonne l'action d'Hilbert-einstein pour la métrique g.

Ceci a été précedemment démontré dans [Ka] et [KW]. En fait il résulte de la théorie des invariants [Gi] que

$$c_{\partial_M^{-n+2}}(x) = \int_{S^{n-1}} \operatorname{tr} \sigma_{-n}(\partial_M^{-n+2})(x, \xi),$$

est proportionnel à la courbure scalaire car c'est un invariant dont l'action des difféomorphismes ne dépend que de leurs jets d'ordre ≤ 2.

En géométrie non commutative l'opérateur $ds = \partial_M^{-1}$ est l'élèment infinitésimal de volume. Ainsi pour $n = 4$,

$$\operatorname{res} ds^2 = -c_4 \int_M r_M(x) \sqrt{g(x)} d^4x,$$

s'interprète comme l'aire de la variété M de dimension 4 (cf. [Co3]).

Références

[BG] R. Beals et P. Greiner. *Calculus on Heisenberg Manifolds.* Annals of Math. Studies 119, Princeton University press, 1985.

[Co1] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1995.

[Co2] A. Connes *The Action in Noncommutative Geometry.* CMP **117** (1988) pp. 673-683.

[Co3] A. Connes *Géométrie du point de vue spectrale et brisure spontannée de symétrie.* Séminaire Bourbaki, Juin 1996.

[CM] A. Connes et H. Moscovici. *The Local Index Formula in Noncommutative Geometry.* GAFA **5** (1995) pp. 174-243.

[FGLS] B.V. Fedosov, F. Golse, E. Leichtnam et E. Schrohe. *The Noncommutative Residue for Manifolds with Boundary,* JFA **142** (1996), pp. 1-31.

[Gi] P. Gilkey. *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem.* Publish or Perish, 1984.

[LM] B. Lawson et M.L. Michelson. *Spin Geometry,* Princeton University press, 1989.

[Ka] D. Kastler. *The Dirac Operator and Gravitation*, CMP **166** (1995) pp. 633-643.

[KV] M. Kontsevitch et S. Vishik. *Determinants of elliptic pseudodifferential operators* in *Functionnal Analysis in the eve of 21st century*, Progress in Mathematics, Birkhaüser, 1994.

[KW] W. Kalau and M. Walze. *Gravity, Noncommutative Geometry and the Wodżicki Residue*, J. of Geom. and Phys. **16** (1995) pp. 327-344.

[Se] R.T. Seeley. *Complex powers of an elliptic operator*. AMS Proc. symp. in Pure Math. **10** (1967) pp. 288-307.

[Wo] M. Wodzicki. *Noncommutative Residue: Part I Fondamentals* in *K-theory, Arithmetic and Geometry*, Lectures notes 1289, Springer Verlag, 1987.

Quatrième partie

Exposés

Formule de Feynman-Kac

exposé de première année de magistère

30 septembre 1994

1 Introduction

Soit une particule de masse m soumise au potentiel V. Son opérateur hamiltonien est :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V.$$

On sait grâce à l'équation de Schrödinger que si φ est la fonction d'onde de la particule à l'instant initial, alors sa fonction d'onde à l'instant t est :

$$\varphi_t(x) = (e^{\frac{-it}{\hbar}H}\varphi)(x).$$

Dans sa thèse, Richard Feynman montre heuristiquement l'existence d'une probabilité $d\omega$ sur l'espace Ω_x des trajectoires continues qui ont la position x à l'instant $t = 0$, de telle sorte qu'on ait :

$$(e^{\frac{-it}{\hbar}}H\varphi)(x) = \int_{\Omega_x} e^{\frac{i}{\hbar}S_t(\omega)}d\omega,$$

où $S_t(\omega)$ est l'action de la trajectoire ω à l'instant t :

$$S_t(\omega) = \int_0^t \left(\frac{1}{2m}|\nabla V(\omega(s))|^2 + V(\omega(s))\right) ds.$$

Utilisant la méthode de la phase stationnaire, on voit que lorsque $\hbar \to 0$, les seules trajectoires qui comptent sont celles dont l'action est stationnaire. A la limite semi-classique, on retrouverait alors le principe de moindre action.

En dépit de nombreux efforts, on a toujours pas pu démontrer rigoureusement la formule de Feynman. Néanmoins, grâce à la mesure de Wiener, on peut exprimer $e^{-t/\hbar H}$ au moyen d'une intégrale fonctionnelle ; c'est la formule de Feynman-Kac.

La mesure de Wiener est en fait une famille de probabilités $(\mu_x)_{x\in\mathbb{R}^N}$ sur l'espace Ω des fonctions de $[0,\infty)$ à valeurs dans $\dot{\mathbb{R}}^N$, le compactifié d'Alexendrov de $\mathbb{R}^N$, mais grâce au théorème de Wiener, chaque μ_x est concentrée sur l'espace Ω_x, des fonctions continues de $[0,\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ prennant la valeur x en 0. On démontre l'existence de la mesure de Wiener et la continuité des trajectoires section 2. A la section 3 on démontre la formule de Feynman-Kac. Le point de départ de la démonstration est la formule de Trotter qu'on démontre section 1 après avoir dit des généralités sur les opérateurs semi-bornés.

2 Formule de Trotter

2.1 Opérateurs non bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle *opérateur (non borné)* de $\mathcal{H}$ la donnée d'un sous espace vectoriel $D(A)$ de $\mathcal{H}$ et d'une application linéaire $A : D(A) \to \mathcal{H}$. Ceci est équivalent à la donnée du *graphe* de A :

$$G(A) = \{(x, Ty) \; ; \; y \in D(A)\},$$

qui est un sous espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ tel que la projection de $G(A)$ dans $\mathcal{H}$ $(x, y) \mapsto x$ est injective.

Si A et B sont des opérateurs de $\mathcal{H}$, on définit $A+B$ comme l'opérateur de domaine $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ tel que :

$$(A+B)x = Ax + Bx \qquad \forall x \in D(A) \cap D(B).$$

On dit que l'opérateur A est *densément défini* si $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas le sous espace :

$$\{(y,z)\ ;\ \langle x|y\rangle = \langle Tx|z\rangle \quad \forall x \in D(A)\},$$

est le graphe d'un opérateur. On dit que cet opérateur est l'*adjoint* de A et on le note A^*.

On dit que l'opérateur A est *auto-adjoint* si on a $A = A^*$. Dans ce cas :

$$\operatorname{Sp} A = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ T - \lambda \text{n'est pas bijectif de } D(A) \text{ dans } \mathcal{H}\},$$

est un fermé inclus dans $\mathbb{R}$. On dit alors que A est *positif* si $\operatorname{Sp} T$ est inclus dans $[0, \infty[$, et qu'il est *semi-borné* s'il existe $c > 0$ tel que l'opérateur $A + c$ soit positif.

Si l'opérateur A est auto-adjoint, le théorème spectral affirme alors qu'il existe un espace localement compact X, une mesure de Radon μ sur X, un opérateur unitaire U de $\mathcal{H}$ dans $L^2(X,\mu)$ et une fonction continue à valeurs réelles f sur X de telle sorte que UAU^* soit l'opérateur de multiplication par f sur $L^2(X,\mu)$, i.e. :

$$D(UAU^*) = D(f) = \{g \in L^2(X,\mu)\ ;\ fg \in L^2(X,\mu)\},$$

$$(UTU^*)g = fg \qquad \forall g \in D(f).$$

En particulier $\operatorname{Sp} A = f(X)$. On peut alors définir un calcul fonctionnel pour A à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: à toute fonction g dans l'algébre $\mathcal{B}^\infty(\operatorname{Sp} A)$ des fonctions boréliennes bornées sur $\operatorname{Sp} A$ on asocie l'opérateur borne' $g(A)$ de $\mathcal{H}$ tel que :

$$g(A)x = U^*(gof.Ux) \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Ce calcul fonctionnel est un morphisme d'algèbres qui est continu au sens suivant : si (g_n) est une suite d'élèments de $\mathcal{B}^\infty(\operatorname{Sp} A)$ convergeant simplement vers $g \in \mathcal{B}^\infty(\operatorname{Sp} A)$, alors les opérateurs $g_n(A)$ convergent fortement vers $g(A)$.

2.2 Formule de Trotter

Si A est un opérateur semi-borné, on peut définir e^{-tA} pour tout $t \geq 0$. On obtient alors un semi groupe à 1-paramétre qui vérifie les propriètés suivantes :

i) $e^{-(s+t)A} = e^{-sA}e^{-tA}$ pour tout s et t dans $[0, \infty[$;

ii) $\|e^{-tA}\| \leq e^{-at} \quad \forall t \geq 0$, avec $a = \inf \operatorname{Sp} A$;

iii) pour tout $x \in \mathcal{H}$, l'application $t \mapsto e^{-tA}x$ est continue de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{H}$ et son image est incluse dans $D(A)$;

iv) pour tout $x \in D(A)$, l'application $t \mapsto e^{-tA}x$ est dérivable, et on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-tA}x - x}{t} = -Ax.$$

La formule de Trotter peut s'énoncer comme suit :

Théorème 1 *Soit A et B des opérateurs semi-bornés tels que l'opérateur $A+B$ soit semi boné. Alors :*

$$\lim_{n \to \infty} (e^{-\frac{tA}{n}} e^{-\frac{tB}{n}})^n x = e^{-t(A+B)}x \qquad \forall x \in \mathcal{H},\ \forall t \geq 0.$$

Démonstration. On peut supposer que $t=1$. Soit $x \in \mathcal{H}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\|e^{-(A+B)}x - (e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}})^n x\| \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{n} \|(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}})^{k-1}(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})e^{-\frac{n-k}{n}(A+B)}x\|, \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{n} (\|e^{-A}\|\|e^{-B}\|)^{\frac{k-1}{n}} \|(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})e^{-\frac{n-k}{n}(A+B)}x\|, \\
&\quad \leq \max(1, \|e^{-A}\|\|e^{-B}\|). \sup_{0\leq s\leq 1} \|n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})e^{-s(A+B)}x\|.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $y \in D(A+B)$, on a :

$$\begin{aligned}
&n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})y \\
&\quad = e^{-\frac{A}{n}}By \;+\; e^{-\frac{A}{n}}\left(\frac{e^{-\frac{B}{n}}y-y}{1/n} - By\right) \;+\; \frac{e^{-\frac{A}{n}}y-y}{1/n} \;-\; \frac{e^{-\frac{A+B}{n}}y-y}{1/n}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} = By + 0 + Ay - (A+B)y = 0.$$

Maintenant, $G(A+B) = G((A+B)^*)$ étant fermé dans $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ on munit $D(A+B)$ d'une structure d'espace de Banach grâce à la norme-graphe :

$$\|y\|_{A+B} = \|y\| + \|(A+B)y\| \qquad \forall y \in D(A+B).$$

Pour cette norme les opérateurs $n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})$ $(n \geq 1)$ forment une suite d'opérateurs continus de $D(A+B)$ dans $\mathcal{H}$ convergeant simplement vers 0. Par le théorème de Banach-Steinhaus il existe alors une constante $C > 0$ telle qu'on ait :

$$\|n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})y\| \leq C\|y\|_{A+B} \qquad \forall y \in D(A+B).$$

On voit ainsi que la convergence est uniforme sur tout compact de $D(A+B)$. Mais l'application $s \mapsto e^{-s(A+B)}x$ étant continue de $[0,\infty[$ dans $D(A+B)$, l'ensemble :

$$\{e^{-sA}x \;;\; 0 \leq s \leq 1\},$$

est un compact de $D(A+B)$. Par conséquent :

$$\sup_{0\leq s\leq 1} \|n(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}} - e^{-\frac{A+B}{n}})e^{-s(A+B)}x\| \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Il en résulte que $\lim_{n\to\infty}(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{B}{n}})^n x = e^{-(A+B)}x$. ☐

Remarque. Ceci n'est qu'une version faible de la formule de Trotter. La véritable formule de Trotter se démontre dans le cas où l'opérateur $A+B$ n'ést plus supposé auto-adjoint, mais seulement essentiellement auto-adjoint (i.e. que $G(A+B)$ est un sous-ensemble dense de $G((A+B)^*)$. En fait, Kato a démontré la formule de Trotter dans le cas où les opérateurs ne sont plus supposés densément définis, mais positifs au sens où $\langle Ax|x\rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in D(A)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$ et appliquons la formule de Trotter à l'opérateur de Schrödinger $H = H_0 + V$, où $V \in C_c(\mathbb{R}^N)$ agit par multiplication et $H_0 = -\Delta$ est l'opposé du laplacien sur $\mathbb{R}^N$ et est défini sur :

$$D(H_0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N) \;;\; \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ au sens des distributions}\}.$$

La formule de Trotter peut s'appliquer et on obtient :

$$e^{-t(H_0+V)}f = \lim_{n\to\infty}(e^{-\frac{t}{n}H_0}e^{-\frac{t}{n}V})^n f \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \forall t \geq 0.$$

La convergence étant dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une sous-suite $(n_k) \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \lim_{k\to\infty}((e^{-\frac{t}{n_k}H_0}e^{-\frac{t}{n_k}V})^{n_k}f)(x_0) \qquad \text{p.p.}$$

D'autre part, l'opérateur e^{-tH_0} ayant pour noyau :

$$p(x,y;t) = \begin{cases} (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \exp(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}) & \text{si } t > 0, \\ \delta_0(x-y) & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned}(e^{-\frac{t}{n}H_0} e^{-\frac{t}{n}V})^n f(x_0) &= \int \dots \int \exp\left(-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^{n} V(x_j) \right) f(x_n) \\ &\qquad p(x_0, x_1; \frac{t}{n}) \dots p(x_{n-1}, x_n; \frac{t}{n}) dx_1 \dots dx_n.\end{aligned}$$

Maintenant, soit $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}^N$ et soit ω une trajectoire continue de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}^N$ de telle sorte que, $\omega(\frac{jt}{n}) = x_j$ et que ω soit affine sur l'intervalle $[\frac{jt}{n}, \frac{(j+1)t}{n}]$ pour tout $j = 0, 1, \dots, n-1$. Alors, la somme :

$$\frac{t}{n} \sum_{j=1}^{n} V(x_j)) = \frac{t}{n} \sum_{j=1}^{n} V(\omega(\frac{jt}{n})),$$

est une somme de Riemman, qui lorsque n devient infini, tend vers :

$$\int_0^t V(\omega(s)) ds.$$

De plus, on peut interpréter la probabilité :

$$p(x_0, x_1; \frac{t}{n}) p(x_1, x_2; \frac{t}{n}) \dots p(x_{n-1}, x_n; \frac{t}{n}) dx_1 \dots dx_n,$$

comme une probabilité sur toutes les trajectoires qui à n fixé ont la même forme que ω ci-dessus. Mais lorsque n devient grand les trajectoires continues ont tendance à être toutes de cette forme. Intuitivement, on devrait obtenir une probabilité $d\omega$ sur l'espace toutes les trajectoires continues partant de x_0, et de telle sorte qu'on aurait :

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \int \quad \dots \quad \int e^{-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^{n} V(x_j) f(x_n)} p(x_0, x_1; \frac{t}{n}) \dots p(x_{n-1}, x_n; \frac{t}{n}) dx_1 \dots dx_n \\ &\quad = \int e^{-\int_0^t V(\omega(s)) ds} f(\omega(t)) d\omega\end{aligned}$$

Il en résulterait alors la formule :

$$(e^{-t(H_0+V)} f)(x_0) = \int \exp(-\int_0^t V(\omega(s)) ds) f(\omega(t)) d\omega.$$

Cette probabilité c'est la mesure de Wiener, et la formule, la formule de Feynman-Kac.

3 La mesure de Wiener

Dans toute cette section on désigne par x_0 un élèment de $\mathbb{R}^N$.

3.1 Construction de la mesure de Wiener

$x_0 \in \mathbb{R}^N$. Pour construire la mesure de Wiener il est commode d'introduire $\dot{\mathbb{R}}^N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$, le compactifié d'Alexendrov de $\mathbb{R}^N$, et $\Omega = \prod \dot{\mathbb{R}}^N$, le produit d'un nombre infini de copies de $\dot{\mathbb{R}}^N$ indexées par $[0, \infty[$, c.a.d. l'ensemble de toutes les applications ω de $[0, \infty[$ dans $\dot{\mathbb{R}}^N$. On munit Ω de la topologie produit, qui est la topologie la moins fine rendant continue les projections $\omega \mapsto \omega(t)$ $(t \geq 0)$. Par le théorème de Tichonoff, Ω est un espace compact. Il résulte alors théorème de Riesz que toute mesure borélienne finie sur Ω correspond alors à une forme linéaire positive sur $C(\Omega)$.

Maintenant soit φ une fonction continue sur Ω de la forme :

$$\varphi(\omega) = F(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n)) \qquad \forall \omega \in \Omega,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ et $F \in C((\dot{\mathbb{R}}^N)^n)$. Utilisant la propriété de semi-groupe:

$$\int p(x,y;s)p(y,z;t)dy \;=\; p(x,z;s+t) \qquad \forall (x,z) \in (\mathbb{R}^N)^2,\ \forall (s,t) \in (R_+)^2,$$

on montre que la valeur de l'intégrale:

$$\int \cdots \int F(x_1, \ldots, x_n) p(x_0, x_1; t) \ldots p(x_{n-1}, x_n; t) dx_1 \ldots dx_n,$$

ne dépend que de φ. On note cette valeur $L_{x_0}(\varphi)$. On définit de cette façon une forme linéaire sur l'espace $C_{\text{fin}}(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω qui sont de la forme ci-dessus pour n arbitraire. Par construction L_{x_0} est une forme linéaire positive telle que $L_{x_0}(1) = 1$, donc c'est une forme linéaire sur $C_{\text{fin}}(\Omega)$ qui est continue pour la norme de $C(\Omega)$ et dont la norme d'opérateur est égale à 1.

D'autre part $C_{\text{fin}}(\Omega)$ est une sous algèbre unitale de $C(\Omega)$ qui sépare les points. Par le théorème de Stone-Weierstrass elle est dense dans $C(\Omega)$ et on peut alors prolonger L_{x_0} par continuité en une forme linéaire sur $C(\Omega)$ qui est positive et de norme égale à 1. Le théorème de Riesz permet ensuite de représenter L_{x_0} par une probabilité sur Ω définie sur les boréliens. On note cette mesure μ_{x_0} : c'est la mesure de Wiener.

Par exemple, si $B_1, \ldots, B_n$ sont des boréliens de $\mathbb{R}^N$ et si $0 < t_1 < \ldots < t_n$, alors:

$$\begin{aligned} &\mu_{x_0}(\{\omega\ ;\ \omega(t_j) \in B_j \text{ pour } j = 1, \ldots, n\}) \\ &\quad = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} p(x_0, x_1; t) \ldots p(x_{n-1}, x_n; t) dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

En particulier, on a:

$$\mu_{x_0}(\{\omega;\ \omega(0) = x_0\}) = 1.$$

3.2 Continuité des trajectoires

La propriété fondamentale de la mesure de Wiener c'est qu'elle est portée par les trajectoires continues qui sont à valeur dans $\mathbb{R}^N$. Il s'agit du théorème de Wiener. Pour le démontrer on introduit la notation:

$$\rho_\epsilon(\delta) = \sup_{t \leq \delta} \int_{|x-y|>\epsilon} p(x,y;t)dy \qquad \delta > 0,\ \epsilon > 0.$$

Cela ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}^N$. Si $t \in]0, \delta[$, on a:

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|>\epsilon} p(x,y;t)dy &= \pi^{-N/2} \int_{|x-y|>\epsilon/2t^{1/2}} e^{-|y|^2} dy, \\ &\leq e^{-\epsilon/4t^{1/2}} \pi^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy, \\ &\leq e^{\delta/4\delta^{1/2}} 2^{N/2}. \end{aligned}$$

D'où on déduit que:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} \rho_\epsilon(\delta) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Lemme 1 *Soit $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, et $0 < t_1 < \ldots < t_n$ avec $t_n - t_1 < \delta$. Alors :*

$$\mu_{x_0}\left(\bigcup_{1 \leq j,k \leq n} \{\omega\ ;\ |\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\epsilon\} \right) \leq 2\rho_{\epsilon/2}(\delta).$$

Démonstration. On pose:

$$A = \bigcup_{1 \leq j,k \leq n} \{\omega\ ;\ |\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\epsilon\},$$

$$B = \{\omega\ ;\ |\omega(t_1) - \omega(t_n)| > \epsilon/2\}.$$

Pour $j = 1, \dots, n$ on pose :

$$\Gamma_j = \{\omega \ ; \ |\omega(t_j) - \omega(t_n)| > \epsilon/2\},$$

$$\Delta_j = \{\omega \ ; \ |\omega(t_1) - \omega(t_j)| > \epsilon/2 \text{ et } \ |\omega(t_1) - \omega(t_k)| \leq \epsilon \text{ si } k < j\}.$$

Soit $\omega \in A$. Il existe des indices j et k tels que $|\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\epsilon$. Comme on a :

$$\begin{aligned} \max\{|\omega(t_1) - \omega(t_j)|, |\omega(t_1) - \omega(t_k)|\} &\geq \frac{1}{2}(|\omega(t_1) - \omega(t_j)| + |\omega(t_1) - \omega(t_k)|, \\ &> \epsilon, \end{aligned}$$

il existe au moins un indice l tel que $|\omega(t_1) - \omega(t_l)| > \epsilon$. Soit p le plus petit petit de ces indices. Par définition $\omega \in \Delta_p$. Mais si $\omega \notin B$, alors $|\omega(t_1) - \omega(t_n)| \leq \epsilon/2$, et on a :

$$\begin{aligned} |\omega(t_p) - \omega(t_n)| &\geq |\omega(t_p) - \omega(t_1)| - |\omega(t_1) - \omega(t_n)|, \\ &> \epsilon/2, \end{aligned}$$

i.e. $\omega \in \Gamma_p$. On en déduit que $\omega \in B \cup (\Gamma_p \cap \Delta_p)$. Il en résulte l'inclusion :

$$A \subset B \bigcup_{1 \leq j \leq n} (\Gamma_j \cap \Delta_j).$$

A fortiori :

$$\mu_{x_0}(A) \leq \mu_{x_0}(B) + \sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(B) &= \int\int_{|x-y|>\epsilon/2} p(x_0, x_1; t_1) p(x_1, x_n; t_n - t_1) dx_1 dx_n, \\ &= \int p(x_0, x_1; t_1) \left(\int_{|x-y|>\epsilon/2} p(x_1, x_n; t_n - t_1) dx_n \right) dx_1, \\ &\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta). \end{aligned}$$

Puis, soit D_j la fonction telle que :

$$D_j(\omega(t_1), \dots, \omega(t_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \Delta_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(\Delta_j) &= \int \cdots \int D_j(x_1, \dots, x_j) p(x_0, x_1; t_1) \dots \\ &\quad \dots p(x_{j-1}, x_j; t_j - t_{j-1}) dx_1 \dots dx_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j) &= \int \dots \int_{|x_j - x_n|>\epsilon/2} D_j(x_1, \dots, x_j) p(x_j, x_n; t_n - t_j) \\ &\quad p(x_0, x_1; t_1) \dots p(x_{j-1}, x_j; t_j - t_{j-1}) dx_1 \dots dx_j dx_n, \\ &\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta) \mu_{x_0}(\Delta_j). \end{aligned}$$

Mais les Δ_j sont disjoints 2 à 2, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j) &\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta) \sum_{j=1}^{n} \mu_{x_0}(\Delta_j), \\ &\leq \rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta). \end{aligned}$$

D'où $\mu_{x_0}(A) \leq \mu_{x_0}(B) + \sum_{j=1}^n \mu_{x_0}(\Gamma_j \cap \Delta_j) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$. $\square$

L'idée qui est derrière la démonstration du lemme, c'est que la trajectoire n'a pas de mémoire : le passé (ω est dans Δ_j) n'a aucune influence sur le présent (ω est dans Γ_j).

Lemme 2 *Soit $\delta > 0$, $\epsilon > 0$, $0 \leq a < b$ avec $b - a \leq \delta$, et soit :*

$$E_{a,b,\epsilon,\delta} = \{\omega \; ; \; \exists (s,t) \in [a,b]^2, \; |\omega(s) - \omega(t)| > 2\epsilon\}.$$

Alors :

$$\mu_{x_0}(E_{a,b,\epsilon,\delta}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta).$$

Démonstration. Notons Σ l'ensemble de toutes les parties finies de l'intervalle $[a,b]$. Pour $S \in \Sigma$ on pose :

$$O_S = \{\omega \; ; \; \exists (s,t) \in S^2, \; |\omega(s) - \omega(t)| > 2\epsilon\}.$$

La famille $(O_S)_{S\in\Sigma}$ est une famille d'ouverts de Ω dont la réunion est $E_{a,b,\epsilon,\delta}$.
D'autre part, μ_{x_0} est une mesure borélienne finie sur l'espace compact Ω, donc elle est régulière et on a :

$$\mu_{x_0}(E_{a,b,\epsilon,\delta}) = \sup\{\mu_{x_0}(K); \; K \text{ compact inclus dans } E_{a,b,\epsilon,\delta}\}.$$

Maintenant, si K est un compact inclus dans $E_{a,b,\epsilon,\delta}$, alors il est contenu dans la réunion des O_S, et par compacité il existe $\Sigma' \subset \Sigma$ finie telle que :

$$K \subset \bigcup_{S\in\Sigma'} O_S.$$

Mais une réunion finie de parties finies est une partie finie, donc :

$$S_0 = \cup_{S\in\Sigma'} S,$$

est une partie fine de $[a,b]$, de telle sorte que O_{S_0} contienne K. Or le lemme 1 dit que $\mu_{x_0}(O_{S_0}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$, donc $\mu_{x_0}(K) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$, et a fortiori, $\mu_{x_0}(E_{a,b,\epsilon,\delta}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$. $\square$

Ce lemme 2 exprime que la probabilité pour qu'on ait une variationde 2ϵ sur un intervalle donné de longueur δ est un $o(\delta)$. Il en résulte que la probabilité pour qu'on ait une variation de 2ϵ sur un intervalle donné est un $o(1)$. C'est ce que dit le lemme suivant :

Lemme 3 *Soit $k \in \mathbb{N}, \delta > 0$, $\epsilon > 0$ et soit :*

$$\Phi_{k,\epsilon,\delta} = \{\omega \; ; \; \exists (s,t) \in [O,k]^2, \; |s-t| \leq \delta \text{ et } |\omega(s) - \omega(t)| > 4\epsilon\}.$$

Alors :

$$\mu_{x_0}(\Phi_{k,\epsilon,\delta}) \leq 2(1 + \frac{k}{\delta})\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta).$$

Démonstration. Pour $j \leq k/\delta$ on pose $a_j = j\delta$. Soit $\omega \in \Phi_{k,\epsilon,\delta}$. Il existe s et t dans $[0,k]$ tels que $s \leq t \leq s + \delta$ et $|\omega(s) - \omega(t)| > 4\epsilon$. Soit j la partie entière de t/δ. On a $t \in [a_j, a_{j+1}]$ et $s \in [a_{j-1}, a_{j+1}]$. Comme $|\omega(s) - \omega(t)| > 4\epsilon$, on a soit $|\omega(s) - \omega(a_j)| > 2\epsilon$, soit $|\omega(t) - \omega(a_j)| > 2\epsilon$. D'où, avec les notations du lemme 2 $\omega \in E_{a_{j-1},a_j,\epsilon,\delta} \cup E_{a_j,a_{j+1},\epsilon,\delta}$. On a ainsi montré que :

$$\Phi_{k,\epsilon,\delta} \subset \bigcup_{0\leq j\leq k/\delta} E_{a_j,a_{j+1},\epsilon,\delta}.$$

Mais par le lemme 2 on a $\mu_{x_0}(E_{a_j,a_{j+1},\epsilon,\delta}) \leq 2\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$ pour tout j, donc $\mu_{x_0}(\Phi_{k,\epsilon,\delta}) \leq 2(1 + \frac{k}{\delta})\rho_{\frac{\epsilon}{2}}(\delta)$. $\square$

Théorème 2 (Wiener) *Soit Ω_0 le sous ensemble de Ω formé des fonctions continues qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors Ω_0 est un borélien de Ω, et on a :*

$$\mu_{x_0}(\Omega_0) = 1.$$

Démonstration. On a :

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \{\omega \ ; \ \forall (s,t) \in [0,k]^2, \ |s-t| < 1/q \Rightarrow |\omega(s) - \omega(t)| \leq 1/p\}.$$

Ceci exprime le fait qu'une fonction est continue sur $[0,\infty[$ si, et seulement si, elle est uniformément continue sur chacun des intervalles $[0,k]$. En particulier, Ω_0 est un borélien et avec les notations du lemme 3 on a :

$$\Omega \setminus \Omega_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{q=1}^{\infty} \Phi_{k,1/p,1/q}.$$

Comme une réunion dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle, il nous suffit de montrer que :

$$\lim_{q\to\infty} \mu_{x_0}(\Phi_{k,1/p,1/q}) = 0 \qquad \forall (k,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*.$$

Or, c'est justement ce qu'affirme le lemme 3. □

Remarque. On peut démontrer un résultat encore plus fort : soit $\alpha > 0$ et soit Ω_α l'espace formé des $\omega \in \Omega$ qui sont hölderiennes d'exposant α, i.e. :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall (s,t) \in [0,\infty]^2 \ |\omega(s) - \omega(t)| \leq C|s-t|^\alpha.$$

Alors on a :

$$\mu_{x_0}(\Omega_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4 La formule de Feynman-Kac

Théorème 3 (Feynman-Kac) *Soit V une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelle et qui s'annulle à l'infini. Alors, pour tout $t \geq 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a :*

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \int_{\Omega_0} \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right) f(\omega(t)) d\mu_{x_0}(\omega) \qquad \text{p.p.}$$

Démonstration. On sait déjà qu'il existe une sous suite $(n_k) \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$(e^{-t(H_0+V)})f(x_0) = \lim_{k\to\infty} ((e^{-\frac{t}{n_k}H_0} e^{-\frac{t}{n_k}V})^{n_k} f)(x_0) \qquad \text{p.p.}$$

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Comme V se prolonge en une fonction continue sur $\dot{\mathbb{R}}^N$, on a :

$$\begin{aligned} ((e^{-\frac{t}{n}H_0} e^{-\frac{t}{n}V})^n f)(x_0) &= \int \ldots \int \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(x_j)\right) f(x_n) \\ &\qquad p(x_0, x_1; \frac{t}{n}) \ldots p(x_{n-1}, x_n; \frac{t}{n}) dx_1 \ldots dx_n, \\ &= \int_{\Omega_0} \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(\omega(\frac{jt}{n}))\right) f(\omega(t)) d\mu_{x_0}(\omega). \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $\omega \in \Omega_0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(\omega(\frac{jt}{n}))\right) f(\omega(t)) = \exp(-\int_0^t V(\omega(s))ds) f(\omega(t)).$$

De plus :

$$\left|\exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(\omega(\frac{jt}{n}))\right) f(\omega(t))\right| \leq e^{-t\sup|V|}|f(\omega(t))|.$$

Mais la fonction $e^{-t\sup|V|}|f(\omega(t))|$ est μ_{x_0}-intégarable sur Ω_0, car on a :

$$\begin{aligned} e^{-t\sup|V|}\int_{\Omega_0}|f(\omega(t))|d\mu_{x_0}(\omega) &\leq e^{-t\sup|V|}(e^{-tH_0}|f|)(x_0), \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème de convergence dominée s'applique, et on obtient :

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to}\int_{\Omega_0}\exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{j=1}^{n}V(\omega(\frac{jt}{n}))\right)f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega) \\ &\quad = \int_{\Omega_0}\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right)f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega). \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$(e^{-t(H_0+V)}f)(x_0) = \int_{\Omega_0}\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right)f(\omega(t))d\mu_{x_0}(\omega) \qquad \text{p.p.}$$

□

De la même manière qu'on a construit la mesure μ_x, on peut construire, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$, une probabilité conditionnelle $\mu_{x,y;t}$ sur Ω de telle sorte qu'on ait :

$$\int_{\Omega_O} f(\omega)d\mu_x(\omega) = \int\left(\int_{\Omega_O} f(\omega)d\mu_{x,y;t}(\omega)\right)dy \qquad \forall f\in C(\Omega).$$

Cette mesure est supportée par les trajectoires continues ω telles que $\omega(0) = x$ et $\omega(t) = y$. Par exemple, si $t_1 < t < t_2$ et F est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_0} F(\omega(t_1),\omega(t_2))d\mu_{x,y;t}(\omega) \\ &\quad = \int\int F(x_1,x_2)p(x,x_1;t_1)p(x_1,y;t-t_1)p(y,x_2;t_2-t)dx_1dx_2. \end{aligned}$$

Grâce à cette probabilité conditionnelle, on peut exprimé le noyau $K_t(x,y)$ de $e^{-t(H_0+V)}$ au moyen d'une intégrale fonctionnelle :

$$K_t(x,y) = \int_{\Omega_0}\exp\left(-\int_0^t V(\omega(s))ds\right)d\mu_{x,y;t}(\omega).$$

Considérons maintenant une particule de masse m, soumise au potentiel V, à la température T. En mécanique statistique classique la fonction de partition qui lui est associée est :

$$Z_C = \int\int e^{-\beta(\frac{p^2}{2m}+V(x))}d^3p\,d^3x,$$

où $\beta = 1/kT$, k étant la constante de Boltzmann.

En mécanique statistique quantique, la fonction de partition est :

$$Z_Q(\hbar) = \text{Trace}\left(\exp(-\beta(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V))\right).$$

On voit que :

$$Z_Q(\hbar) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\Omega_0}\exp\left(\frac{-1}{\hbar}\int_0^\tau V(\omega(s))ds\right)d\mu_{x,x;\tau}(\omega)\right)dx,$$

où on a posé $\tau = \hbar\beta$. On montre alors que :

$$\lim_{\hbar\to 0} Z_Q(\hbar) = Z_C.$$

En d'autres termes, à la limite semi-classique, on retrouve la mécanique satistique classique.

Pour d'autres applications de la formule de Feynman-Kac on pourra consulter le livre de B. Simon.

Références

[N] E. Nelson. *Feynmam Integral and the Schrödinger Equation.* J. Math. Phys. **5** (1964).

[RS] M. Reed et B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Selfadjointess.* Academic Press, 1975.

[S] B. Simon. *Functionnal Integration and Quantum Physics.* Pure and Aplied Mathematics, Academic Press, 1979.

Opérateurs de Dirac

Exposé au G.T. "Théorèmes d'indice,
opérateurs de Dirac et géométrie non commutative"

13 décembre 1995

Dans tout cet exposé on désigne par M une variété compacte riemannienne, et par $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur M.

1 Opérateurs de Dirac et modules de Clifford.

Définition 1 *On appelle opérateur différentiel sur $\mathcal{E}$ d'ordre k un élément du sous espace vectoriel de* $\operatorname{End}(\Gamma(M,\mathcal{E}))$ *:*

$$\mathcal{D}^k = \Gamma(M, \operatorname{End}(\mathcal{E}))\,\operatorname{Vect}\{\nabla_{X_1}\cdots\nabla_{X_j}\ ;\ j\leq k \text{ et } X_i\in\Gamma(M,TM)\},$$

où $\Gamma(M,\operatorname{End}(\mathcal{E}))$ agit par multiplication sur $\Gamma(M,\mathcal{E})$ et ∇ est une connexion sur $\mathcal{E}$.

Soit π la submersion canonique de T^*M sur M. On note $\pi^*\operatorname{End}(\mathcal{E})$ le fibré vectoriel sur T^*M, image réciproque du fibré $\operatorname{End}(\mathcal{E})$ par π.

Définition 2 *Soit $P\in\mathcal{D}^k$. On appelle symbole principal de P la section $\sigma_k(P)\in\Gamma(T^*M,\pi^*\operatorname{End}(\mathcal{E}))$ définie par :*

$$\sigma_k(P)(x,\xi) = \lim_{t\to\infty} t^{-k}e^{-itf(x)}P(e^{itf})(x),$$

où $x\in M$, $\xi\in T^*_xM$ et f est une fonction lisse sur M telle que $d_xf=\xi$.

La définition a bien un sens car si $P\in\mathcal{D}^k$, alors pour tout $x\in M$ et tout $f\in C^\infty(M)$, la fonction :

$$t\longmapsto e^{-itf(x)}P(e^{itf})(x),$$

est un polynôme de la variable réelle t, à valeurs dans $\operatorname{End}(\mathcal{E}_x)$, de degré $\leq k$, et dont le coefficient dominant ne dépend que de d_xf.

On a les propriètés suivantes du symbole principal :

Proposition 1 *Soit $P\in\mathcal{D}^k$ et $Q\in\mathcal{D}^l$. Alors on a :*

$$\sigma_{k+l}(PQ) = \sigma_k(P)\sigma_l(Q),$$

$$\sigma_k(P)(df) = \frac{1}{i^k k!}(\operatorname{ad}_f)^k(P) \qquad \forall f\in C^\infty(M),$$

où pour tout $f\in C^\infty(M)$ on convient d'encore noter f l'opérateur de multiplication par f sur $\Gamma(M,\mathcal{E})$, et où on désigne par ad *la représentation adjointe de* $\operatorname{End}(\Gamma(M,\mathcal{E}))$ *(i.e. $\operatorname{ad}_T = [\,.\,,T]\quad\forall T$).*

Exemple. Sur $\mathcal{E}=\bigwedge T^*M$ la différentielle extérieure d est un opérateur différentiel d'ordre 1 et son symbole principal est donné par :

$$\sigma_1(d)(\omega) = i\varepsilon(\omega) \qquad \forall\omega\in T^*M,$$

où $\varepsilon(\omega)$ désigne l'opérateur de multiplication extérieure à gauche par la 1-forme ω.

Supposons maintenant que $\mathcal{E}$ soit muni d'une métrique hermitienne. On définit alors un produit scalaire sur $\Gamma(M,\mathcal{E})$ en posant :

$$\langle s_1|s_2\rangle = \int_M \langle s_1(x)|s_2(x)\rangle_x |dx| \qquad \forall (s_1,s_2)\in\Gamma(M,\mathcal{E})^2,$$

où $|dx|$ est la densité riemannienne de M.

Proposition 2 *Si $P\in\mathcal{D}^k$, son adjoint P^* pour ce produit scalaire est un opérateur différentiel d'ordre k dont le symbole principal vérifie :*

$$\sigma_k(P^*)(\omega) = \sigma_k(P)(\omega)^* \qquad \forall\omega\in T^*M.$$

Exemple. Rappellons qu'on munit $\bigwedge T^*M$ d'une métrique hermitienne de la façon suivante : si $e_1,\ldots,e_n$ est une base orthonormée de T^*_xM on munit $\bigwedge T^*_xM$ du produit scalaire tel que les $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$ $(i_1<\ldots<i_p)$ forment une base orthonormée. On obtient alors un produit scalaire sur $\Gamma(M,\bigwedge T^*M)$ L'adjoint de d a pour symbole principal :

$$\sigma_1(d^*)(\omega) = -i.\iota(\omega) \qquad \forall\omega\in T^*M,$$

où $\iota(\omega)$ est l'opérateur de contraction par la 1-forme ω.

Définition 3 *On dit que $P\in\mathcal{D}^2$ est un laplacien généralisé, si et seulement si, on a :*

$$\sigma_2(P)(x,\xi) = |\xi|^2\,\mathrm{id}_{\mathcal{E}_x} \qquad \forall x\in M, \forall\xi\in T^*_xM.$$

Remarque. Si $P\in\mathcal{D}^2$ alors c'est un laplacien généralisé si, et seulement si, il s'écrit en coordonnées locales :

$$P \;=\; \sum_{i,j} g^{ij}(x)\partial_i\partial_j \;+\; \text{op. diff. d'ordre 1.}$$

On suppose désormais que $\mathcal{E}$ est un super-fibré : $\mathcal{E}=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$.

Définition 4 *On dit que l'opérateur différentiel D d'ordre 1 impair :*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^+ \\ D^- & 0 \end{pmatrix},$$

avec $D^\pm:\Gamma(M,\mathcal{E}^\mp)\to\Gamma(M,\mathcal{E}^\pm)$, est un opérateur de Dirac si, et seulement si, l'opérateur différentiel d'ordre 2 :

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^-D^+ & 0 \\ 0 & D^+D^- \end{pmatrix},$$

est un laplacien généralisé.

Exemple. Sur $\bigwedge T^*M = \bigwedge^{\mathrm{ev}} T^*M \oplus \bigwedge^{\mathrm{odd}} T^*M$, l'opérateur de Rham $d+d^*$ est un Dirac. Son carré $(d+d^*)^2 = dd^* + d^*d$ est appellé l'opérateur de Laplace-Beltrami.

On rappelle que le fibré en algèbre de Clifford de M est le fibré vectoriel $Cl(M)$ sur M dont la fibre en $x\in M$ est l'algèbre de Clifford $Cl(T^*_x)$.

Définition 5 *On dit que $\mathcal{E}$ est un module de Clifford s'il existe une action $\mathbb{Z}_2$-graduée de $Cl(M)$ sur $\Gamma(M,\mathcal{E})$, laquelle est notée :*

$$c:\Gamma(M,Cl(M)) \longrightarrow \mathrm{End}(\Gamma(M,\mathcal{E})).$$

La proposition suivante établit qu'il y a une correspondance bïunivoque entre actions de Clifford et symboles principaux d'opérateurs de Dirac.

Proposition 3 *Supposons que $\mathcal{E}$ soit un module de Clifford, alors tout opérateur différentiel D d'ordre 1, impair, tel que :*

$$[D,f] = c(df) \qquad \forall f\in C^\infty(M),$$

est un opérateur de Dirac sur $\mathcal{E}$.

Réciproquement, si D un opérateur de Dirac sur $\mathcal{E}$, alors il existe une action de Clifford c sur $\mathcal{E}$ telle que :

$$c(df) = [D,f] \qquad \forall f\in C^\infty(M).$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{E}$ soit un module de Clifford et soit D un opérateur différentiel d'ordre 1, impair, tel que :

$$[D, f] = c(df) \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

Soit $x \in M$ et $\xi \in T_x^*M$. Si $f \in C^\infty(M)$ est telle que $d_x f = \xi$, alors on a :

$$\sigma_2(D^2)(x,\xi) = (\sigma_1(D)(x,\xi))^2 = (\sigma_1(D)(df)(x))^2 \quad \text{et}$$

$$\sigma_1(D)(df) = -i.[D, f] = -i.c(df).$$

On en déduit que $\sigma_2(D)(x,\xi) = -(c(df)(x))^2 = -|\xi|^2$. Il en résulte que D^2 est un laplacien généralisé et que D est un opérateur de Dirac.

Réciproquement, soit D un opérateur de Dirac sur $\mathcal{E}$. Pour tout $f \in C^\infty(M)$ on pose :

$$c(df) = [D, f].$$

La définiton a bien un sens, car D étant un opérateur différentiel d'ordre 1, si $f \in C^\infty(M)$, alors pour tout $x \in M$ l'endomorphisme de $\mathcal{E}_x$:

$$[D, f](x) = i.\sigma_1(D)(df)(x) = i.\sigma_1(D)(x, d_x f),$$

ne dépend que de $d_x f$. Cette remarque permet de plus de prolonger c à T^*M tout entier en posant pour tout $x \in M$ et tout $\xi \in T_x^*M$:

$$c(x,\xi) = c(df)(x) = [D, f](x) = i.\sigma_1(D)(x,\xi),$$

où f est une fonction lisse sur M telle que $d_x f = \xi$. On voit qu'en outre, pour $x \in M$ fixé, l'application $\xi \mapsto c(x,\xi)$ est une application linéaire de T_x^*M dans $\mathrm{End}(\mathcal{E}_x)$ vérifiant :

$$c(x,\xi))^2 = -\sigma_1(D)(x,\xi)^2 = -\sigma_2(D)(x,\xi) = -|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in T_x^*M.$$

Elle se prolonge par conséquent en un morphisme d'algèbres de $Cl(T_x^*M)$ dans $\mathrm{End}(\mathcal{E}_x)$. On obtient ainsi une action de Clifford sur $\mathcal{E}$. $\square$

Exemple. Le fibré $\bigwedge T^*M$ est un module de Clifford pour l'action :

$$c(\alpha) = \varepsilon(\alpha) - \iota(\alpha) \qquad \forall \alpha \in T^*M.$$

Cette action provient de l'opérateur de Rham car pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a :

$$[d + d^*, f] = i(\sigma_1(d)(df) - \sigma_1(d^*)(df)) = \varepsilon(df) - \iota(df).$$

2 Formule de Mac Kean-Singer.

Soit D un opérateur de Dirac sur $\mathcal{E}$. On suppose que le super-fibré $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ est muni d'une métrique hermitienne, pour laquelle $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ sont orthogonaux, et telle que l'opérateur D soit *auto-adjoint* pour le produit scalaire induit par cette métrique.

L'opérateur D^2 est alors ellitique et auto-adjoint. Il existe par consèquent une base orthonormée $(e_n^\pm)_{n\geq 0}$ de $L^2(M, \mathcal{E}^\pm)$ formée de fonctions propres de D^2 :

$$D^2 e_m^\pm = \lambda_m^\pm e_m^\pm \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

L'opérateur de Green associé à D^2, qui est nul sur $\ker D^2$, et qui est l'inverse de D^2 sur $\mathrm{im}\, D^2$ est alors donné par :

$$G = \sum_{\lambda_m^\pm > 0} \frac{1}{\lambda_m^\pm} |e_m^\pm\rangle\langle e_m^\pm|$$

Le comportement des valeurs propres en l'infini est donné par l'asymptotique de Weyl :

$$\lambda_m^\pm \sim \alpha . m^{\frac{2}{\dim M}} \qquad \text{lorsque m} \to \infty.$$

Au moyen des fonctions propres on caractérise les éléments de $\Gamma(M,\mathcal{E})$ parmi ceux de $L^2(M,\mathcal{E}^\pm)$:

$$(s^\pm = \sum s_m^\pm e_m^\pm \text{ section } C^\infty\ ) \Leftrightarrow (\ (s_n^\pm)_{n\geq 0} \text{ est à décroissance rapide}).$$

En particulier $\ker D^2$ est de dimension finie. Comme D est auto-adjoint et que $\ker D = \ker D^*D = \ker D^2$, le super-espace $\ker D = \ker D^+ \oplus \ker D^-$ est aussi de dimension finie. Ceci nous amène la définition de l'indice de D.

Définition 6 *On appelle indice de D l'entier défini par :*

$$\operatorname{ind} D = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^- = \dim\ker D^+ - \dim\operatorname{coker} D^+.$$

Exemple. Soit $d+d^*$ l'operateur de Rham sur $\bigwedge T^*M$ et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. Le théorème de Hodge-Rham affirme que la cohomologie de Rham $H^*(M)$ est isomorphe a l'espace (gradué) des formes différentielles harmoniques sur M, c.a.d. à l'espace vectoriel $\ker\Delta = \ker d+d^*$. En particulier les espaces de cohomologies $H^k(M)$ sont de dimensions finies et $\operatorname{ind} d+d^*$ est égal à la caractéristique d'Euler de M :

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M).$$

Définition 7 *On appelle semi-groupe engendré par D^2, l'application de $\mathbb{R}_+$ vers les opérateurs bornés de $L^2(M,\mathcal{E})$:*

$$t \longmapsto e^{-tD^2},$$

où :

$$e^{-tD^2} = \sum_{m,\pm} e^{-t\lambda_m^\pm} |e_m^\pm\rangle\langle e_m^\pm| \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+.$$

Définition 8 *On appelle noyau de la chaleur de D^2, le noyau $K_t(x,y)\in\operatorname{Hom}(\mathcal{E}_y,\mathcal{E}_x)$ de e^{-tD^2} donné par :*

$$K_t(x,y) = \sum_{m,\pm} e^{-t\lambda_m^\pm} e_m^\pm(x)\otimes e_m^\pm(y)^* \qquad \forall (x,y)\in M^2,$$

de telle sorte que :

$$(e^{-tD^2}s)(x) = \int_M K_t(x,y).s(y)|dy| \qquad \forall s\in L^2(M,\mathcal{E}).$$

La formule de Mac Kean-Singer relie l'indice de D à une intégrale de $K_t(x,x)$; elle est à la base de la démonstration du théorème de l'indice par l'équation de la chaleur.

Théorème 1 (Mac Kean-Singer) *. Pour tout $t>0$, on a :*

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{Str}(e^{-tD^2}) = \int_M \operatorname{Str}(K_t(x,x))|dx|.$$

Démonstration. L'opérateur e^{-tD^2} est un opérateur pair du super-espace $L^2(M,\mathcal{E}) = L^2(M,\mathcal{E}^+)\oplus L^2(M,\mathcal{E}^-)$:

$$e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e^{-tD^-D^+} & 0 \\ 0 & e^{-tD^+D^-} \end{pmatrix},$$

où $e^{-tD^\mp D^\pm}$ est l'opérateur de $L^2(M,\mathcal{E}^\pm)$ de noyau L^2 donné par :

$$K_t^\pm(x,y) = \sum_m e^{-t\lambda_m^\pm} e_m^\pm(x)\otimes e_m^\pm(y)^* \in \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_{\mathrm{y}}^\pm,\mathcal{E}_{\mathrm{x}}^\pm) \qquad \forall (x,y)\in M^2.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Str}(e^{-tD^2}) &= \operatorname{Tr}(e^{-tD^-D^+}) - \operatorname{Tr}(e^{-tD^+D^-}), \\ &= \int_M \operatorname{Tr}(K_t^+(x,x))|dx| - \int_M \operatorname{Tr}(K_t^-(x,x))|dx|, \\ &= \int_M \operatorname{Str}(K_t(x,x))|dx|. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\mathrm{Str}(e^{-tD^2}) = \sum_{\lambda \geq 0} (n_\lambda^+ - n_\lambda^-)\, e^{-t\lambda} \qquad \forall t > 0,$$

où pour tout $\lambda \geq 0$ on a posé :

$$n_\lambda^\pm = \dim \mathcal{H}_\lambda^\pm \qquad \text{avec } \mathcal{H}_\lambda^\pm = \ker(D^2 - \lambda) \cap L^2(M, \mathcal{E}^\pm).$$

Or pour tout $\lambda > 0$ l'opérateur D induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_\lambda^+$ sur $\mathcal{H}_\lambda^-$, donc $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$. Il en résulte que $\mathrm{Str}(e^{-tD^2}) = n_0^+ - n_0^- = \mathrm{ind}\, D$.

Corollaire 1 *Si $(D_v)_{v\in\mathbb{R}}$ est une famille lisse à un paramètre d' opérateurs de Dirac auto-adjoints, alors* $\mathrm{ind}\, D_v$ *ne dépend pas de v.*

Démonstration. Par Mac Kean-Singer $\mathrm{ind}\, D_v = \mathrm{Str}(e^{-tD_v^2})$. Mais la formule de Duhamel montre que :

$$\frac{d}{dv} \mathrm{Str}(e^{-tD_v^2}) = -t\ \mathrm{Str}(\frac{\partial D_v^2}{\partial v} e^{-tD_v^2}) = -t\ \mathrm{Str}([D_v, \frac{\partial D_v^2}{\partial v} e^{-tD_v^2}]') = 0;$$

où $[\ .\ ,\ .\ ]'$ est le super-commutateur sur les opérateurs de $L^2(M, \mathcal{E})$. □

Remarque. On montre que e^{-tD^2} est un opérateur régularisant, c.a.d. qu'il s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{D}'(M)$ dans $C^\infty(M)$. Il en résulte que K_t est un noyau C^∞. De plus comme $K_t(x,y)$ vérifie une équation de la chaleur, c'est en fait une fonction lisse des 3 variables x, y et t.

3 Connexions de Clifford.

On suppose que $\mathcal{E}$ est un module de Clifford.

Définition 9 *Soit ∇ une connexion sur $\mathcal{E}$. On dit que ∇ est une connexion de Clifford si pour tout $a \in \Gamma(M, Cl(M))$ et tout $X \in \Gamma(M, TM)$ on a :*

$$[\nabla_X, c(a)] = c(\nabla_X^{LC} a),$$

où ∇_X^{LC} est la connexion de Levi-Civita étendue au fibré $Cl(M)$.

Si ∇ est une connexion de Clifford on lui associe un opérateur de Dirac D_∇ au moyen des compositions :

$$\Gamma(M, \mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{c} \Gamma(M, \mathcal{E}),$$

où T^*M agit sur $\mathcal{E}$ via c : $a \otimes s \to c(a)s$. Comme en coordonnées locales on a :

$$\nabla = \sum dx^i \otimes \nabla_{\partial_i},$$

on voit que :

$$D_\nabla = \sum c(dx^i) \nabla_{\partial_i}$$

Par conséquent pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a :

$$[D, f] = \sum c(dx^i [\nabla_{\partial_i}, f] = \sum c(dx^i) \partial_i f = c(df).$$

ce qui grâce à proposition 3 montre que D_∇ est bien un opérateur de Dirac.

Exemples. 1. La connexion de Levi-Civita sur $\bigwedge T^*M$ est de Clifford et l'opérateur de Dirac associé est l'opérateur de Rham $d + d^*$.

2. Supposons que M soit une variété spinorielle ($\dim M = 2p$) : cela signifie qu'il existe un fibré $\mathrm{Spin}(n)$ principal $\mathrm{Spin}\, M$ tel que :

$$SO(M) \simeq \mathrm{Spin}\, M \times_{\mathrm{Spin}(n)} SO_n\ .$$

On a alors :

$$Cl(M) = \mathrm{Spin}\, M \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n).$$

Le fibré spineurs sur M :

$$\mathcal{S} = \mathrm{Spin}\, M \times_{\mathrm{Spin}(n)} S,$$

est alors un module de Clifford et la connexion de levi-Civita sur $\mathcal{S}$ est de Clifford. L'opérateur de Dirac qui lui associé est souvent appellé l'opérateur de Dirac sur M.

Remarques. 1. Si M est spinorielle, tout module de Clifford $\mathcal{E}$ sur M est de la forme twistée : $\mathcal{E}$ est isomorphe en tant que $Cl(M)$-module à un fibré de la forme $\mathcal{W}\otimes\mathcal{S}$, où $\mathcal{W}$ est un fibré auxiliaire (on prend $\mathcal{W} = \mathrm{End}_{\mathrm{Cl(M)}}(\mathcal{S},\mathcal{E})$, l'isomorphisme étant donné par l'application $w \otimes s \mapsto w(s)$).

2. Supposons que $\mathcal{E}$ soit muni d'un métrique hermitienne et soit ∇ une connexion de Clifford sur $\mathcal{E}$. On montre que ∇ est unitaire, au sens qu'on a l'égalité entre 1-formes :

$$d\langle s_1|s_2\rangle = \langle \nabla s_1|s_2\rangle + \langle s_1|\nabla s_2\rangle \qquad \forall (s_1,s_2) \in \Gamma(M,\mathcal{E})^2,$$

si et seulement si, l'opérateur de Dirac associé à ∇ est auto-adjoint.

3. On définit de même les super-connexions de Clifford. Si $\mathbb{A}$ est une super-connexion de Clifford, on lui associe un opérateur de dirac $D_{\mathbb{A}}$ grâce aux compositions :

$$\Gamma(M,\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbb{A}} \Gamma(M, \bigwedge T^*M \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbf{c}\otimes 1} \Gamma(M, Cl(M)\otimes\mathcal{E}) \xrightarrow{c} \Gamma(M,\mathcal{E}),$$

où $\mathbf{c}$ est l'application de quantification de $\bigwedge T^*M$ sur $Cl(M)$ définie par:

$$\mathbf{c}(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p) = \alpha_1 \ldots \alpha_p \qquad \forall (\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in (T^*M)^p.$$

On établit que cela définit une correspondance bïunivoque entre opérateurs de Dirac et super-connexions de Clifford. Ainsi, tous les opérateurs de Dirac sur $\mathcal{E}$ ne viennent pas forcèment d'une connexion de Clifford. Néanmoins ceux pour qui c'est le cas sont seulement ceux pour lesquels on possède des "théorèmes géométriques".

Références

[BGV] N. Berline, E. Getzler et M. Vergne. *Heat Kernel and Dirac Operators.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298, Springer Verlag, 1992.

[LM] B. Lawson et M.L. Michelson. *Spin Geometry.* Princeton Mathematical Series 38, Princeton University Press, 1989.

Cohomologie cyclique des fonctions C^∞ sur une variété et du tore non commutatif

Exposé au G.T. "Théorèmes d'indice, opérateurs de Dirac et géométrie non commutative"

27 mars 1996

Dans tout cet exposé on désigne par $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ unifère.

1 Accouplement entre la cohomologie cyclique et la K-théorie (cas impair).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $GL_n(\mathcal{A})$ le groupe des èlèments inversibles de l'algèbre $M_n(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{A}$. On a une inclusion naturelle de $GL_n(\mathcal{A})$ dans $GL_{n+1}(\mathcal{A})$, donnée par l'homomorphisme :

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenant la limite inductive par rapport à ces inclusions, on obtient un groupe, qu'on note $GL_\infty(\mathcal{A})$.

Définition 1 *On appelle groupe de Bass-Whitehead de $\mathcal{A}$, et on note $K_1(\mathcal{A})$, le groupe abélianisé de $GL_\infty(\mathcal{A})$, c.a.d. le quotient de $GL_\infty(\mathcal{A})$ par le sous-groupe des commutateurs.*

De même qu'on a un accouplement entre $K_0(\mathcal{A})$ et $HC^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A})$, la cohomologie cyclique paire de $\mathcal{A}$, on a un accouplement entre $K_1(\mathcal{A})$ et $HC^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$, la cohomologie cyclique impaire de $\mathcal{A}$.

Proposition 1 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre unifère. Alors :*

a) La formule suivante définit un accouplement bilinéaire entre $K_1(\mathcal{A})$ et $HC^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$:

$$\langle [u], [\varphi] \rangle = \lambda_n^{-1} (\varphi \# \operatorname{Tr})(u^{-1} - 1, u - 1, u^{-1} - 1, \ldots, u - 1),$$

où $u \in GL_k(\mathcal{A})$, $\varphi \in Z_\lambda^n(\mathcal{A})$ (n impair), et où on a posé :

$$\lambda_n = \sqrt{2i\pi}\, 2^n\, \Gamma(n + \frac{1}{2}).$$

b) On a :

$$\langle u, S\varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \qquad \forall u \in K_1(\mathcal{A})\ \forall \varphi \in HC^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}).$$

c) Soit $\mathcal{B}$ une autre $\mathbb{C}$-algèbre unifère. Alors, pour tout $\varphi \in HC^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A})$, $\psi \in HC^{\mathrm{odd}}(\mathcal{B})$, $e \in K_0(\mathcal{A})$ et $u \in K_1(\mathcal{A})$, on a :

$$\langle e \otimes u \ + \ (1 - e) \otimes 1, [\varphi \# \psi] \rangle = \langle e, [\varphi] \rangle \langle u, [\psi] \rangle.$$

Démonstration. Montrons qu'on a bien un accouplement. Déjà, l'additivité par rapport à φ et la compatibilité vis à vis des inclusions, $GL_k(\mathcal{A}) \subset GL_{k'}(\mathcal{A})$ $(k \leq k')$ ne posent pas de problème. De plus, quitte à remplacer $\mathcal{A}$ par $M_n(\mathcal{A})$ et φ par $\varphi\#\,\mathrm{Tr}$, on peut supposer que $k=1$.

Considérons l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}.1$, obtenue en ajoutant une unité à $\mathcal{A}$ et munie du produit, $((x,\lambda),(y,\mu)) \mapsto (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$.

Soit $\tilde{\varphi} \in C^n_\lambda(\mathcal{A})$ donné par l'égalité :

$$\tilde{\varphi}((a^0,\lambda^0),(a^1,\lambda^1),\ldots,(a^n,\lambda^n) = \varphi(a^0,a^1,\ldots,a^n)) \qquad \forall (a^j,\lambda^j) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Montrons que $\tilde{\varphi}$ appartient à $Z^n_\lambda(\tilde{\mathcal{A}})$. En effet, pour $(a^0,\lambda^0),\ldots,(a^n,\lambda^n)$ dans $\tilde{\mathcal{A}}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}((a^0,\lambda^0),\ldots,(a^i,\lambda^i)(a^{i+1},\lambda^{i+1}),\ldots,(a^n,\lambda^n))\\
&\quad = \varphi(a^0,\ldots,a^ia^{i+1},\ldots,a^n)\\
&\qquad + \lambda^i\varphi(a^0,\ldots,a^{i-1},a^i,\ldots,a^n) + \lambda^{i+1}\varphi(a^0,\ldots,a^i,a^{i+2},\ldots,a^n).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
b\tilde{\varphi}((a^0,\lambda^0),\ldots,(a^{n+1},\lambda^{n+1})) &= b\varphi(a^0,\ldots,a^{n+1}),\\
&\quad +\lambda^0\varphi(a^1,\ldots,a^{n+1})\\
&+ (-1)^{n+1}\lambda^0\varphi(a^{n+1},a^1,\ldots,a^n),\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, si $u \in GL_1(\mathcal{A})$ on a :

$$\varphi(u^{-1}-1,u-1,\ldots,u^{-1}-1,u-1) = \tilde{\varphi}(\tilde{u}^{-1},\tilde{u},\ldots,\tilde{u}^{-1},\tilde{u}),$$

où $\tilde{u} = (u-1,1) \in \tilde{\mathcal{A}}$. On se ramène ainsi au cas où φ satisfait à la relation :

$$\varphi(1,a^0,\ldots,a^{n-1}) = 0 \qquad \forall a^j \in \mathcal{A}.$$

Il s'agit alors de montrer que la fonction de $GL_1(\mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}$:

$$\chi(u) = \varphi(u^{-1},u,\ldots,u^{-1},u),$$

vérifie la relation :

$$\chi(uv) = \chi(u) + \chi(v) \qquad \forall (u,v) \in GL_1(\mathcal{A})^2.$$

Remarquons qu'avec $U = \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, on a :

$$\chi(uv) = (\varphi\#\,\mathrm{Tr})(U^{-1},U,\ldots,U^{-1},U) \quad \text{et}$$

$$\chi(u)+\chi(v) = (\varphi\#\,\mathrm{Tr})(V^{-1},V,\ldots,V^{-1},V).$$

Mais U et V sont reliés par le chemin :

$$U_t = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Regardant ce chemin comme un èlèment du produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes C^\infty(\mathbb{R}, M_2(\mathbb{C}))$, on voit que la fonction :

$$t \longmapsto (\varphi\#\,\mathrm{Tr})(U_t^{-1},U_t,\ldots,U_t^{-1},U_t),$$

est lisse sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il nous suffit de montrer que sa dérivée est nulle ; ce qu'on vérifie au moyen de la relation $(U_t^{-1})' = -U_t^{-1}U_t'U_t^{-1}$.

Reste à montrer que le résultat est nul si φ est un cobord : $\varphi = b\psi$ avec $\psi \in C^{n-1}_\lambda$. Comme le cup-produit d'un cobord donne un cobord, on peut encore supposer que $k=1$. Le calcul montrant que $\tilde{\varphi}$ est un cocycle cyclique montre que $\tilde{\varphi} = \widetilde{(b\psi)} = b\tilde{\psi}$. Ceci nous permet de nous ramener au cas où $\psi(1,a^1,\ldots,a^{n-2}) = 0 \quad \forall a^j \in \mathcal{A}$. On vérifie alors que $b\psi(u^{-1},u,\ldots,u) = 0$.

□

Remarques. 1. L'égalité b) définit un accouplement naturel entre $K_1(\mathcal{A})$ et $H^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A})$, la cohomologie cyclique périodique impaire de $\mathcal{A}$.

2. Les constantes λ_n sont déterminées, a un facteur multiplicatif près, par les égalités b) et c). Le facteur $\sqrt{2i\pi}$ vient de ce qu'on veut avoir la relation :

$$\langle u \wedge v, \varphi \# \psi\rangle = \langle u, \varphi\rangle\langle v, \psi\rangle,$$

où $\wedge : K_1(\mathcal{A}) \times K_1(\mathcal{B}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ est un produit défini dans le contexte des pré-C^*-algèbres (i.e. des algèbres de Banach involutives qui sont isomorphes à une sous-algèbre d'une C^*-algèbre qui est involutive et stable par calcul fonctionnel holomorphe).

2 Algèbres localement convexes.

Supposons que $\mathcal{A}$ soit munie d'une toplogie localement convexe, pour laquelle le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est continu. En d'autres termes, pour toute semi-norme continue p sur $\mathcal{A}$, il existe une semi-norme continue p' sur $\mathcal{A}$ telle que :

$$p(ab) \leq p'(a)p'(b) \qquad \forall(a,b) \in \mathcal{A}^2.$$

On remplace alors le dual algébrique $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$ par le *dual topologique*, et l'espace $C^n(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ des formes $(n+1)$-linéaires sur $\mathcal{A}$ par l'espace C^n des formes $(n+1)$-linéaires continues : $\varphi \in C^n$ si, et seulement si, il existe une semi-norme continue p sur $\mathcal{A}$ pour laquelle on a :

$$|\varphi(a^0,\ldots,a^n)| \leq p(a^0)\ldots p(a^n) \qquad \forall a^j \in \mathcal{A}.$$

Comme le produit est continu on a $b\varphi \in C^{n+1} \quad \forall \varphi \in C^n$. Comme les formules pour le cup-produit des cochaînes ne font intervenir que le produit de $\mathcal{A}$,elles font toujours sens pour les formes multilinéaires continues, et tous les résultats précédents sont vrais sans changement dans le cas continu.

Maintenant parlons des résolutions projectives. Comme nous le verrons dans la section suivante, ce sont des outils particulièrement utiles pour calculer la cohomologie de Hochschild. Tout d'abord on peut supposer que $\mathcal{A}$ est complète car C^n n'est pas changé quand on remplace $\mathcal{A}$ par son complété, qui est encore une algèbre topologique localement convexe.

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre topologique localement convexe complète. Par *module topologique* sur $\mathcal{B}$, on entend un espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{M}$, qui soit un $\mathcal{B}$-module, et tel que l'application $(b,\xi) \mapsto b\xi$ soit continue de $\mathcal{B} \times \mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$. On dit que $\mathcal{M}$ est *topologiquement projectif* s'il est un facteur direct d'un module topologique de la forme $\mathcal{M}' = \mathcal{B}\hat{\otimes}_\pi E$, où E est un espace vectoriel topologique localement convexe complet et $\hat{\otimes}_\pi$ est le produit tensoriel topologique projectif. En particulier, $\mathcal{M}$ est complet en tant que sous espace fermé de l'espace vectoriel topologique localement convexe complet $\mathcal{M}'$.

Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux $\mathcal{B}$-modules topologiques, complets en tant que espaces vectoriels localement convexes, et $p : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ est une application $\mathcal{B}$-linéaire continue munie d'une section transversale $\mathbb{C}$-linéaire continue $s : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$, on peut compléter le triangle d'applications $\mathcal{B}$-linéaires continues :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}_1 \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{M} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{M}_2, \end{tikzcd}$$

pour toute application $\mathcal{B}$-linéaire continue $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_2$.

Définition 2 *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}$-module topologique. Par une résolution projective (topologique) de $\mathcal{M}$, on entend une suite exacte de $\mathcal{B}$-modules projectifs et d'applications $\mathcal{B}$-linéaire continues :*

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\epsilon} \mathcal{M}_0 \xleftarrow{b_1} \mathcal{M}_1 \xleftarrow{b_2} \mathcal{M}_2 \longleftarrow \cdots,$$

qui admet une homotopie $\mathbb{C}$-linéaire continue $s_i : \mathcal{M}i \rightarrow \mathcal{M}_{i+1}$ telle que :

$$b_{i+1}s_i \;+\; s_{i-1}b_i = \mathrm{id} \qquad \text{pour tout } i.$$

L'algèbre $\mathcal{A}$, munie de la structure de module sur $\mathcal{B} = \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}^0$ (produit tensoriel de $\mathcal{A}$ par son algèbre opposée $\mathcal{A}^0$) donnée par :

$$(a \otimes b^0)c = acb, \qquad \forall (a,b,c) \in \mathcal{A}^3,$$

admet la résolution projective canonique $(\mathcal{M}_n, b_n)$ suivante :

- $\mathcal{M}_n = \mathcal{B}\hat{\otimes}_\pi E_n$ (en tant que $\mathcal{B}$-module), avec $E_n = \mathcal{A}^{\hat{\otimes}_\pi^n}$;
- $\epsilon : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{A}$ est donnée par :

$$\epsilon(a \otimes b^0) = ab \qquad \forall (a,b) \in \mathcal{A}^2 \ ;$$

- $b_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n-1}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} b_n(1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) &= (a_1 \otimes 1) \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (1 \otimes 1) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes a_n \\ &+ (-1)^n (1 \otimes a_n^0) \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}), \end{aligned}$$

  où $a^1, \ldots, a^k$ appartiennent à $\mathcal{A}$.

La section suivante est continue :

$$s_n((a \otimes b^0) \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) = (1 \otimes b^0) \otimes (a \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n).$$

Soit le complexe :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{b_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{A}^*) \longrightarrow \cdots,$$

où on symbolise par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}$ les applications $\mathcal{B}$-linéaires continues. Sa cohomologie coïncide avec la cohomologie de Hochschild continue de $\mathcal{A}$. On obtient un coïsomorphisme entre ces cohomologies, grâce au $\mathcal{B}$-morphisme qui à tout $\varphi \in C^k$ associe $T_\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_k, \mathcal{A}^*)$ donné par :

$$T_\varphi((a \otimes b) \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^k)(a^0) = \varphi(ba^0a, a^1, \ldots, a^k) \qquad \forall (a, b, a^1, \ldots, a^k) \in \mathcal{A}^{k+3}.$$

Comparant cette résolution avec une résolution topologique projective quelconque du module $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$, on obtient :

Lemme 1 *Pour toute résolution projective topologique $(\mathcal{M}_n, b_n)$ du module $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B} = \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}^0$, la cohomologie de Hochschild continue $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ coïncide avec la cohomologie du complexe :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{b_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{A}^*) \longrightarrow \cdots.$$

3 Exemple 1 : $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, V variété compacte.

On munit cette algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(V)$ de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet, donnée par les semi-normes $p_n(f) = \sup_{\alpha \leq n} \partial_\alpha f$ (via des cartes locales), et on considère uniquement les formes multilinéaires *continues.* Pour tout entier k, on identifie le produit tensoriel topologique :

$$C^\infty(V)\hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} C^\infty(V) = C^\infty(V)^{\hat{\otimes}^k},$$

à l'algèbre localement convexe $C^\infty(V^k)$.

En particulier l'algèbre $\mathcal{B} = \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}^0$ s'identifie à l'algèbre $C^\infty(V \times V)$ et le $\mathcal{B}$-module $\mathcal{A}$ correspond au $\mathcal{B}$-module donné par l'inclusion diagonale :

$$\Delta : V \to V \times V, \qquad \Delta(p) = (p,p) \quad \forall p \in V$$

Proposition 2 *Soit V une variété compacte, $\mathcal{A}$ l'algèbre localement convexe $C^\infty(V)$ et $\mathcal{D}_k$ l'espace des courants de Rham sur V de dimension k. Alors :*

a) Le groupe de cohomologie de Hochschild continue $H^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ est canoniquement isomorphe à l'espace des courants de Rham de dimension k sur V : à $\varphi \in Z^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ est associé le courant $C_\varphi \in \mathcal{D}_k$ donné par la formule :

$$\langle C_\varphi, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k\rangle = \frac{1}{k!}\sum_{k\in S_k} \epsilon(\sigma)\varphi(f^0, f^{\sigma(1)}, \ldots, f^{\sigma(k)}) \qquad \forall f^j \in C^\infty(V).$$

b) Sous cet isomorphisme l'opérateur $IoB : H^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*) \to H^{k-1}(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ correspond à k fois le bord de Rham pour les courants $b : \mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_{k-1}$.

Démonstration. a) Vérifions que la formule ci-dessus définit bien un élèment de $\mathcal{D}_k$. Tout d'abord, on montre qu'on définit un opérateur d'assymétrisation totale en les k dernières variables $A_k : C^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*) \to C^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ qui à $\varphi \in C^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ associe le cocycle :

$$A_k\varphi = \frac{1}{k!}\sum_{k\in S_k} \epsilon(\sigma)\varphi^\sigma,$$

où pour $\sigma \in S_k$, le cocycle φ^σ est donné par :

$$\varphi^\sigma = \varphi(f^0, f^{\sigma(1)}, \ldots, f^{\sigma(k)}) \qquad \forall f^j \in \mathcal{A}.$$

On vérifie que le noyau de A_k contient les cobords de Hochschild.

Ensuite, si $\varphi \in C^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ est tel que $\varphi^\sigma = \epsilon(\sigma)\varphi\ \forall\sigma \in S_k$, alors il existe un courant C_φ de dimension k sur V tel que :

$$\langle C_\varphi, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k\rangle = \varphi(f^0, f^1, \ldots, f^k) \qquad \forall f^j \in C^\infty(V).$$

En effet, φ satisfaisant à la condition :

$$\begin{aligned}&\varphi(f^0, f^1f^2, \ldots, f^{k+1})\\ &\quad = \varphi(f^0f^1, f^2, \ldots, f^{k+1}) + \varphi(f^0f^2, f^1, \ldots, f^{k+1}),\end{aligned}$$

pour $f^0, \ldots, f^{k+1}$ dans $C^\infty(V)$, l'assymétrie de φ fait que si on le regarde comme une distribution sur V^{k+1}, son support est inclus dans la diagonale :

$$\Delta_{k+1} = \{(x, x, \ldots, x)\ ;\ x \in V\} \subset V^{k+1}.$$

Il en résulte que le problème de l'existence de C_φ est local, et qu'il se résout par l'utilisation de coordonnées locales (ou en étant vérifié pour une variété particulière pour laquelle c'est facile, par exemple $V = \mathbb{T}^n$).

Ainsi, à tout $\varphi \in Z^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ on associe un courant $C_\varphi = C_{A_k\varphi}$ donné par la formule :

$$\langle C_\varphi, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k\rangle = \frac{1}{k!}\sum_{k\in S_k} \epsilon(\sigma)\varphi(f^0, f^{\sigma(1)}, \ldots, f^{\sigma(k)}) \qquad \forall f^j \in C^\infty(V).$$

Comme le noyau de A_k contient les cobords de Hochschild, C_φ ne dépend que de la classe de φ dans $H^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$. On définit ainsi un morphisme $\alpha : H^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*) \to \mathcal{D}_k$.

Il s'agit de montrer que α est un isomorphisme. Déjà α est surjectif car il admet l'inverse à gauche $\beta : \mathcal{D}_k \to H^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$, où pour $C \in \mathcal{D}_k$ la classe $\beta(C)$ est celle du cocyle φ_C donné par la formule :

$$\varphi_C = \langle C, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k\rangle \qquad \forall f^j \in \mathcal{A}.$$

Pour montrer l'injectivité, on peut remplacer V par $V \times S^1$ car si $\bar{\mathcal{A}}$ est l'algèbre localement convexe $\mathbb{C}^\infty(V \times S^1)$, l'homomorphisme $\rho : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ donné par l'évaluation en un point $p \in S^1$ induit une injection $\rho^* : H^k(\mathcal{A},\mathcal{A}^*) \to H^k(\bar{\mathcal{A}}_\times,\bar{\mathcal{A}}^*)$. Ceci permet de supposer que la caractéristique d'Euler de V est nulle.

Supposons ainsi que $\chi(V) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $E_k = \mathrm{pr}_2{}^* \bigwedge^k \mathrm{T}^*_{\mathbb{C}} V$ l'image réciproque de la k-ième puissance extérieure du fibré cotangent complexifié par la seconde projection $\mathrm{pr}_2 : V \times V \to V$. Par construction $E_1^* = \mathrm{pr}_2{}^* \mathrm{T}\,V$. Comme la caractéristique d'Euler de V est nulle, il existe un champ de vecteur réel sur V qui s'annulle nulle part, au moyen duquel on fabrique une section $X(a,b)$ de E_1^* telle que :

- pour (a,b) assez proche de la diagonale, on a $X(a,b) = \exp_b^{-1}(a)$, où $\exp_b : T_bV \to V$ est l'application exponentielle associée à une métrique riemmanienne donnée sur V ;

– $X(a,b) \neq 0$ pour $a \neq b$.

Ceci nous permet de construire une résolution projective explicite du module $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B} = \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{A}^0 = C^\infty(V \times V)$:

$$\mathcal{A} \xleftarrow{\Delta^*} \mathcal{M}'_0 \xleftarrow{\iota_X} \mathcal{M}'_1 \xleftarrow{\iota_X} \mathcal{M}'_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{M}'_n \longleftarrow 0,$$

où $\mathcal{M}'_k$ est le $\mathcal{B}$-module $C^\infty(V \times V, E_k)$ et ι_X est la contraction par X.

De plus, on a un isomorphisme naturel :

$$C^\infty(V \times V, E_k)\hat{\otimes}_{C^\infty(V\times V)}C^\infty(V) \simeq C^\infty(V, \Delta^* E_k).$$

Comme par construction $\Delta^* E_k$ c'est $\bigwedge^k \mathrm{T}^*_{\mathbb{C}} V$, on obtient un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}'_k, \mathcal{A}^*)$ et $\mathcal{D}_k$. Plus explicitement, à $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}'_k, \mathcal{A}^*)$ correspond le courant C_T dont l'accouplement avec $\omega \in C^\infty(V, \bigwedge^k \mathrm{T}^*_{\mathbb{C}} V)$ est donné par :

$$\langle C_T, \omega\rangle = T(\omega')(1),$$

où $\omega' \in \mathcal{M}'_k$ est tel que $\Delta^*\omega' = \omega$. D'autre part, la restriction de X à la diagonale étant nulle, l'opérateur de cobord $\iota_X^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}'_{k-1}, \mathcal{A}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}'_k, \mathcal{A}^*)$ est nul. Du lemme 1 il résulte alors l'existence d'un isomorphisme $\tilde{\alpha} : H^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to \mathcal{D}_k$.

Pour expliciter cet isomorphisme, il nous suffit d'exhiber un morphisme de complexes F de la résolution projective standard $(\mathcal{M}_p, b_p)$ vers la résolution projective $(\mathcal{M}'_p, \iota_X)$ au dessus de l'identité de $\mathcal{A}$. Ici $\mathcal{M}_p = C^\infty(V \times V \times V^p)$ et F est donné par :

$$(F\omega)(a, b, x^1, \ldots, x^p) = \langle X(x^1, b) \wedge \ldots \wedge X(x^p, b), \omega(a, b)\rangle,$$

où ω appartient à $\mathcal{M}'_p = C^\infty(V \times V, E_p)$ et $a, b, x^1, \ldots, x^p$ sont dans V. Comme F vérifie la relation $b_p F = F i_X$ pour tout p, on a un isomorphisme F^* de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}'_k, \mathcal{A}^*)$ vers H^k, le k-ième espace de cohomologie du complexe $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_p, \mathcal{A}^*), b_p^*)$. L'isomorphisme $\tilde{\alpha}$ est alors donné par les compositions :

$$H^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{\varphi \mapsto T_\varphi} H^k \xrightarrow{F^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}'_k, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{T \mapsto C_T} \mathcal{D}_k,$$

où pour $\varphi \in Z^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ le morphisme T_φ est donné par :

$$T_\varphi((f \otimes g) \otimes f^1 \otimes \ldots \otimes f^k)(f^0) = \varphi(g f^0 f, f^1, \ldots, f^k) \qquad \forall (f, g, f^0, \ldots, f^k) \in \mathcal{A}^{k+3}.$$

On vérifie alors que $\tilde{\alpha} = k!\alpha$; ce qui montre l'injectivité de α.

b) Soit $C \in \mathcal{D}_k$ et soit φ_C le cocycle de Hochschild correspondant :

$$\varphi_C(f^0, f^1, \ldots, f^k) = \langle C, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k\rangle, \qquad \forall f^j \in C^\infty(V).$$

On a :

$$\begin{aligned} B_0\varphi(f^0, \ldots, f^{k-1}) &= \varphi(1, f^0, \ldots, f^{k-1}), \\ &= \langle C, df^0 \wedge \ldots \wedge df^{k-1}\rangle, \\ &= \langle bC, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^{k-1}\rangle. \end{aligned}$$

Comme φ_C est par construction assymétrique, on en déduit que :

$$B\varphi_C = AB_0\varphi_C = kB_0\varphi_C = k\varphi_{bC}.$$

□

Théorème 1 *Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre localement convexe $C^\infty(V)$. Alors :*

1) Pour tout entier k, la cohomologie cyclique continue $HC^k(\mathcal{A})$ est canoniquement isomorphe à la somme directe :

$$\ker b(\subset \mathcal{D}_k) \oplus H_{k-2}(V, \mathbb{C}) \oplus H_{k-4}(V, \mathbb{C}) \oplus \ldots,$$

où $H_*(V, \mathbb{C})$ est l'homologie de Rham de V et b est le bord de Rham.

2) $H^*(\mathcal{A})$ est canoniquement isomorphe à l'homologie de Rham (avec la filtration par la dimension).

Démonstration. !) Décrivons explicitement l'isomorphisme. Soit $\varphi \in HC^k(\mathcal{A})$. Le courant $C = C_{I_\varphi}$ associé à $I(\varphi)$ est donné par :

$$\langle C, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{k \in S_k} \epsilon(\sigma)\varphi(f^0, f^{\sigma(1)}, \ldots, f^{\sigma(k)}) \qquad \forall f^j \in C^\infty(V).$$

Il est fermé car $BI(\varphi) = 0$, de sorte que la cochaîne :

$$\tilde{\varphi}(f^0, f^1, \ldots, f^k) = \langle C, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k \rangle \qquad \forall f^j \in C^\infty(V),$$

appartient à Z^k_λ. La classe de $\varphi - \tilde{\varphi}$ est par construction dans le noyau de I. Comme $\operatorname{im} S = \ker I$, il existe $\psi \in HC^{k-2}(\mathcal{A})$ tel que $\varphi - \tilde{\varphi} = S\psi$, et ψ est unique modulo $\operatorname{im} B$. Ainsi la classe d'homologie de C_{I_ψ} est univoquement déterminée. C'est aussi le cas la classe de $\psi - \tilde{\psi}$ dans $HC^{k-2}(\mathcal{A})$. Répétant ce processus, on obtient la suite des classes d'homologies $\omega_j \in H_{k-2j}(V, \mathbb{C})$. Par construction φ est dans la même classe dans $HC^k(\mathcal{A})$ que $\varphi_C + \sum S^j \varphi_{\omega_j}$ où pour tout courant fermé ω_j dans la classe, le cocycle ϕ_{ω_j} est tel que :

$$\varphi_{\omega_j}(f^0, \ldots, f^k) = \langle \omega_j, f^0 df^1 \wedge \ldots \wedge df^k \rangle \qquad \forall f^l \in \mathcal{A}.$$

Ceci montre que l'application qu'on vient de construire est une injection de $HC^k(\mathcal{A})$ dans $\ker b (\subset \mathcal{D}_k) \oplus H_{k-2}(V, \mathbb{C}) \oplus H_{k-4}(V, \mathbb{C}) \oplus \ldots$.

La surjectivité est immédiate.

2) La construction de l'isomorphisme montre que $S : HC^k(\mathcal{A}) \to HC^{k+2}(\mathcal{A})$ correspond à l'application qui à $C \in \ker b$ associe sa classe d'homologie. L'inclusion en résulte. D'autre part, ici, la suite spetrale associée à la suite (I, B, S) de Connes est dégénérée ; ce qui fait que son terme E_2 est déjà l'homologie de Rham. ☐

4 Exemple 2 : Tore non commutatif $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soit $\lambda = e^{2i\pi\theta}$. Notons $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ l'espace des suites $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ à décroissances rapides (i.e. $(|n| + |m|)^q |a_{n,m}|$ est borné pour tout $q \in \mathbb{N}$).

Soit $\mathcal{A}_\theta$ l'algèbre dont l'élément générique est une somme formelle, $\sum a_{n,m} U_1^n U_2^m$, où $(a_{n,m}) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ et dont le produit est déterminé par l'égalité $U_2 U_1 = \lambda U_1 U_2$.

Déterminons explicitement $H^*(\mathcal{A}_\theta)$. La première étape est de calculer la cohomologie de Hochschild $H(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*)$, où $\mathcal{A}$ est muni d'une structure d'algèbre topologique localement convexe via les semi-normes $p_q(a) = \sup(1 + |m| + |n|)^q |a_{m,n}|$.

Selon la valeur θ, il faut distinguer trois cas :

- $\theta \in \mathbb{Q}$; cette algèbre est alors Morita-équivalente à l'algèbre commutative des fonctions lisses sur le tore $\mathbb{T}^2$. Dans ce cas, le calcul de $H^*(\mathcal{A}_\theta)$ résulte de la section précédente.

- $\theta \notin \mathbb{Q}$ et θ satisfait une condition *diophantienne* du type :

$$|1 - \lambda^n|^{-1} = \mathrm{O}(n^k) \qquad \text{pour un certain } k \,;$$

- $\theta \notin \mathbb{Q}$ et θ ne satisfait pas une condition diophantienne.

Proposition 3 *Soit $\theta \notin \mathbb{Q}$. Alors :*

a) On a :

$$H^0(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*) = \mathbb{C}.$$

b) Si θ satisfait une condition diophantienne, on a :

$$\dim H^j(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 1, \\ 1 & \text{si } j = 2. \end{cases}$$

c) Si θ ne satisfait pas une condition diophantienne, alors H^1 et H^2 sont des espaces de dimensions infinies non séparés.

Proposition 4 *Si $\theta \notin \mathbb{Q}$, alors $HC^0(\mathcal{A}_\theta) = \mathbb{C}$, et l'application :*

$$I : HC^1(\mathcal{A}_\theta) \longrightarrow H^1(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*),$$

est un isomorphisme.

Sur $\mathcal{A}_\theta$ on a 3 opérateurs remarquables :

– La trace canonique sur $\mathcal{A}_\theta$, qu'on note τ, et qui est donnée par :

$$\tau(\sum a_\nu U^\nu) = a_{0,0},$$

où on a posé $U^\nu = U_1^{n_1} U_2^{n_2}$ pour $\nu = (n_1, n_2)$.

– Les dérivations basiques de $\mathcal{A}_\theta$, notées δ_1 et δ_2, qui sont définies par les relations :

$$\delta_j(U^\nu) = 2i\pi n_j U^\nu \qquad (j = 1, 2)$$

Ces opérateurs permettent de construire des bases explicites de $H^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A}_\theta)$ et de $H^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}_\theta)$.

Proposition 5 *Soit θ un réel quelconque ; alors :*

a) On a :

$$H^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A}_\theta) \simeq \mathbb{C}^2 \qquad \text{et} \qquad H^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}_\theta) \simeq \mathbb{C}^2.$$

b) Une base de

$$H^{\mathrm{odd}}(\mathcal{A}_\theta) = H^1(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{A}_\theta^*)/\operatorname{im}(I \circ B),$$

est fournie par les cocycles cycliques φ_1 et φ_2 sur $\mathcal{A}_\theta$ donnés pour $j = 1, 2$ par :

$$\varphi_j(x^0, x^1) = \tau(x^0 \delta_j(x^1)) \qquad \forall x^k \in \mathcal{A}_\theta.$$

c) On a $H^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A}_\theta) = H^2(\mathcal{A}_\theta)$; c'est un espace vectoriel dont une base est formée de $S\tau$ et du cocycle cyclique φ sur $\mathcal{A}_\theta$, donné par :

$$\varphi(x^0, x^1, x^2) = (2i\pi)^{-1} \tau(x^0(\delta_1(x^1)\delta_2(x^2) - \delta_2(x^1)\delta_1(x^2))) \qquad \forall x^j \in \mathcal{A}_\theta.$$

Passons maintenant à l'accouplement entre $H^{\mathrm{ev}}(\mathcal{A}_\theta)$ et $K_0(\mathcal{A}_\theta)$. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers premiers entre eux avec $q > 0$ et p pouvant être nul. On construit alors un module projectif de type fini $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{p,q}$ sur $\mathcal{A}_\theta$.

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide de la droite réelle et V_1 et V_2 les deux opérateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définis par :

$$(V_1\xi)(s) = \xi(s - \epsilon) \qquad \text{et} \qquad (V_2\xi)(s) = e(s)\xi(s),$$

où $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \frac{p}{q} - \theta$ et $e(s) = e^{2i\pi s}$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

Considérons ensuite un espace de Hilbert de dimension fini K, et deux opérateurs unitaires w_1 et w_2 sur K, tels que :

$$w_2 w_1 = \bar{e}(p/q) w_1 w_2 \qquad \text{et} \qquad w_1^q = w_2^q = 1.$$

Dans le produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$ on a :

$$(V_2 \otimes w_2)(V_1 \otimes w_1) = \bar{\lambda}(V_1 \otimes w_1)(V_2 \otimes w_2).$$

On munit alors $\mathcal{E} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$ d'une structure de $\mathcal{A}_\theta$-module en posant pour $j = 1, 2$:

$$\xi U_j = (V_j \otimes w_j)\xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K.$$

On montre que $\mathcal{E}$ est bien un *$\mathcal{A}_\theta$-module projectif de type fini.* En fait :

Proposition 6 *Soit $\mathcal{E}$ un module projectif de type fini sur $\mathcal{A}_\theta$. Alors :*

– *soit $\mathcal{E}$ est libre et $\mathcal{E} = \mathcal{A}_\theta^p$ pour un certain $p > 0$;*

– *soit $\mathcal{E}$ est isomorphe à module de la forme $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$ pour la structure de module ci-dessus.*

En tant qu'espace vectoriel $H^{\text{ev}}(\mathcal{A}_\theta)$ est de dimension égale à 2. Une base est donnée par $S\tau$ et le cocycle φ donné par :

$$\varphi(x^0, x^1, x^2) = (2i\pi)^{-1}\tau(x^0(\delta_1(x^1)\delta_2(x^2) - \delta_2(x^1)\delta_1(x^2))) \qquad \forall x^j \in \mathcal{A}_\theta.$$

L'accouplement de K_0 avec $S\tau$ est le même qu'avec τ et est donné par la dimension de Murray-Von Neumann :

$$\langle \mathcal{E}_{p,q}, \tau \rangle = p - \theta q.$$

Pour déterminer l'accouplement de K_0 avec φ, on considère le cycle Ω de dimension 2 et de caractère φ :

– En tant qu'algèbre graduée Ω est le produit tensoriel *gradué* de l'algèbre $\mathcal{A}_\theta$ par l'algèbre extérieure $\bigwedge^* \mathbb{C}^2$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$.

– Sa différentielle d est déterminée par l'égalité :

$$d(a \otimes \alpha) = \delta_1(a) \otimes (e_1 \wedge \alpha) + \delta_2(a) \otimes (e_2 \wedge \alpha) \qquad \forall (a, \alpha) \in \mathcal{A}_\theta \times \bigwedge^* \mathbb{C}^2.$$

– La trace graduée $\int : \Omega^2 \to \mathbb{C}$ vérifie :

$$\int a \otimes (e_1 \wedge e_2) \mapsto (2i\pi)^{-1}\tau(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A}_\theta.$$

Une connexion sur un module projectif de type fini $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}_\theta$ est alors donnée par un couple (∇_1, ∇_2) de dérivées covariantes, satisfaisant à :

$$\nabla_j(\xi a) = (\nabla_j \xi)a + \xi \delta_j(a) \qquad \forall (\xi, a) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A}_\theta.$$

La courbure Θ s'identifie alors à :

$$(\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1) \otimes (e_1 \wedge e_2).$$

Sur $\mathcal{E}_{p,q} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$ on définit dans ces conditions une connexion ∇ par les formules :

$$(\nabla_1\xi)(s) = 2i\pi\frac{s}{\epsilon}\xi(s) \qquad \text{et} \qquad (\nabla_2\xi)(s) = \frac{d\xi}{ds}(s),$$

où $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$ et $s \in \mathbb{R}$. La courbure de cette connexion est constante, égale à $-\frac{2i\pi}{\epsilon} \otimes (e_1 \wedge e_2)$. La valeur de l'accouplement est alors :

$$\langle \mathcal{E}_{p,q}, \varphi \rangle = \frac{1}{2i\pi}.\frac{-2i\pi}{\epsilon}.\tau(\mathrm{id}_{\mathcal{E}_{p,q}}) = -\frac{1}{\epsilon}(p - \theta q) = q.$$

On ainsi prouvé le résultat suivant :

Proposition 7 *Soit $\varphi \in HC^2(\mathcal{A}_\theta)$ le cocycle cyclique défini précédemment. Alors :*

$$\langle K_0(\mathcal{A}_\theta), \varphi \rangle \subset \mathbb{Z}.$$

Références

[Co1] A. Connes. *Noncommutative Differential Geometry.* Publications Mathématiques de l'IHES No 62, pp 41-144, 1985.

[Co2] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1995.

Cinquième partie

Mémoire de D.E.A.

Trace de Dixmier

19 octobre 1995

Ce mémoire présente de manière détaillée la construction de la trace de Dixmier donnée en appendice dans [CM].

Notations

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert *séparable* muni d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ antilinéaire à droite. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_n$ le sous espace de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ formé des opérateurs de rang $\leq n$.

Si E est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, on note aussi E le projecteur orthogonal associé.

Si ξ est un vecteur de norme 1, on note $|\xi\rangle\langle\xi|$ le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par ξ (notation de Dirac).

On note $\mathcal{K}$ l'idéal bilatère fermé des opérateurs compacts de $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{L}^1$ l'idéal bilatère des opérateurs à trace de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On rappelle que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur à trace, alors pour toute base orthonormée $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \eta_n | T \eta_n \rangle,$$

est absolument convergente et sa somme est indépendante du choix du choix de la base$(\xi_n)_{n\geq 0}$. On note cette somme Trace(T). Cela définit une trace sur $\mathcal{L}^1$, et l'application définie par :

$$\|T\|_1 \;=\; \mathrm{Trace}\,|T| \qquad \forall T \in \mathcal{L}^1,$$

est une norme, la norme trace, qui fait de $\mathcal{L}^1$ un espace de Banach.

1 Traces sur une C^*-algèbre

Dans toute cette section on désigne par A une C^*-algèbre *unifère*, et par X un espace topologique localement compact. De plus, on note A_+ le cône (positif) des élèments positifs de A.

Définition 1 *On dit qu'une partie B de A est C^*-stable si, pour tout $x \in B$, on a aussi $x^* \in B$ et $|x| \in B$.*

Proposition 1 *Tout idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une partie C^*-stable.*

Démonstration. Soit I un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, et soit $T \in I$. Notons $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Comme I est un idéal bilatère, les opérateurs $|T| = U^*T$ et $T^* = U^*TU^*$ sont dans I. □

Définition 2 *On appelle C^*-idéal de A tout idéal bilatère I de A qui est C^*-stable et qui est munit d'une norme $\|\,.\,\|_I$ pour laquelle I est un espace de Banach, de telle sorte que :on ait :*

$$\||x|\|_I = \|x^*\|_I = \|x\|_I \qquad \forall x \in I,$$

et qu'on ait :

$$\|axb\|_I \leq \|a\|\|x\|_I\|b\| \qquad \forall x \in I,\ \forall (a,b) \in A^2.$$

Exemples. 1. Grâce à la théorie des unités approchées, on montre que tout idéal bilatère fermé de A est C^*-stable. Il en résulte qu'un tel idéal est un C^*-idéal pour la norme de A.

2. Soit μ une mesure de Radon sur X et $p \in [1,\infty[$. Alors, $L^p_\mu(X) \cap L^\infty_\mu(X)$, vu comme idéal bilatère de la C^*-algèbre $L^\infty_\mu(X)$, est un C^*-idéal pour la norme définie par :

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in L^p_\mu(X).$$

3. *Idéaux de Schatten.* Soit $p \in [1,\infty[$. Alors, l'ensemble $\mathcal{L}^p$ des opérateurs compacts tels que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p \ \leq \ \infty,$$

où $(\mu_n(T)_n)_{n\geq 0}$ est la suite des valeurs propres de $|T|$, est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. C'est un C^*-idéal pour la norme donnée par :

$$\|T\|_p \ = \ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall T \in \mathcal{L}^p.$$

Dans toute la suite de cette section, on désigne par I un idéal bilatère de A et on note $I_+ = I \cap A_+$ le cône des élèments positifs de I.

Définition 3 *On appelle trace sur I toute forme linéaire positive τ sur I telle que :*

$$\tau(ax) = \tau(xa) \qquad \forall x \in I \ \forall a \in A.$$

Définition 4 *On appelle poids sur I_+ toute application $\tau : I_+ \to \mathbb{R}_+$ qui est additive et homogène. On dit que le poids τ est tracial si, pour tout $x \in I_+$ et $u \in A$ unitaire, on a :*

$$\tau(u^*xu) = \tau(x).$$

Lemme 1 *Tout èlèment de A est combinaison linéaire de quatre unitaires.*

Démonstration. Comme pour tout $x \in A$ on a :

$$x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i\frac{1}{2i}(x - x^*),$$

on se ramène à montrer que tout élément auto-adjoint de A est combinaison linéaire de 2 unitaires.

Soit $x \in A$ auto-adjoint. Quitte à diviser x par sa norme, on peut en outre supposer que x est de norme ≤ 1. Dans ce cas, son spectre est inclus dans [-1,1], et les applications :

$$t \mapsto \ \frac{t \pm \sqrt{1-t^2}}{2},$$

envoient $Sp_A x$ dans U(1), le groupe des nombres complexes de module égale à 1. Par calcul fonctionnel continu, les èlèments de A :

$$u_+ = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad u_- = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{2},$$

sont alors deux unitaires dont la somme est égale à x. □

Lemme 2 *Soit I un idéal bilatère C^*-stable. Alors, tout $x \in I$ admet une écriture de la forme :*

$$x \ = \ (x_1 - x_2) \ + \ i(x_3 - x_4),$$

où les x_j appartiennent à I_+.

Démonstration. Soit $x \in I$. On a :

$$x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i\frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Mais comme I est C^*-stable, $\frac{1}{2}(x+x^*)$ et $\frac{1}{2i}(x-x^*)$ sont des élèments auto-adjoints de I. Il en résulte qu'il suffit de montrer que tout élèment auto-adjoint de I est égal à la différence de deux éléments de I_+.

Maintenant soit $x \in I$ auto-adjoint. Comme I est C^*-stable, les élèments de A :

$$x_\pm = \frac{1}{2}(x \pm |x|),$$

sont des élèments de I dont la somme est égale à x. De plus, ils sont auto-adjoints et leurs spectres sont inclus dans $\mathbb{R}_+$, donc ils appartiennent à I_+. □

Proposition 2 *Soit I un idéal bilatère C^*-stable de A, et τ un poids sur I_+. Alors :*

a) τ s'étend de manière unique en une forme linéaire $\bar{\tau}$ sur I dans B.

b) Si τ est tracial, alors $\bar{\tau}$ est une trace sur I.

c) Supposons que I soit un C^*-idéal pour la norme $\|.\|_I$, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\tau(x)| \leq C\|x\|_I \qquad \forall x \in I_+.$$

Alors, $\bar{\tau}$ est une forme linéaire continue sur I (pour $\|.\|_I$).

Démonstration. a) Soit $x \in I$, et soit deux écritures de x données par par le lemme 2 :

$$x = (x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4),$$
$$x = (x_1' - x_2') + i(x_3' - x_4'),$$

où les x_j et les x_j' appartiennet à I_+. Comme :

$$\frac{1}{2}(x + x^*) = x_1 - x_2 = x_1' - x_2',$$

on a :

$$x_1 + x_2' = x_1' + x_2.$$

Appliquant τ dans cette dernière égalité, et utilisant l' additivité de τ, on obtient :

$$\tau(x_1) - \tau(x_2) = \tau(x_1') - \tau(x_2').$$

De même, on a :

$$\tau(x_3) - \tau(x_4) = \tau(x_3') - \tau(x_4').$$

Par conséquent, le nombre complexe :

$$\bar{\tau}(x) = \tau(x_1) - \tau(x_2) + i(\tau(x_3) - \tau(x_4)),$$

ne dépend que de x et pas des x_j. On obtient ainsi une application $\bar{\tau}$ de I dans $\mathbb{C}$ qui est additive et homogène, et qui plus vérifie les égalités :

$$\bar{\tau}(\epsilon x) = \epsilon\bar{\tau}(x) \qquad \forall x \in I,\ \forall \epsilon \in \{\pm 1, \pm i\}.$$

Il en résulte que $\bar{\tau}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Par construction, c'est l'unique forme linéaire sur I qui prolonge τ .

b) Supposons que τ soit un poids tracial, et soit $u \in A$ unitaire. L'unitaire invariance de τ montre que les applications de I dans $\mathbb{C}$:

$$x \longmapsto \bar{\tau}(x) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \bar{\tau}(u^*xu),$$

sont deux prolongements linéaires de τ sur I. Par conséquent, elles coïncident sur I. On en déduit que :

$$\bar{\tau}(ux) = \bar{\tau}(xu) \qquad \forall x \in I.$$

Or, par le lemme 1 tout élément de A est combinaison linéaire d'unitaires, donc par linéarité $\bar{\tau}$ est une trace sur I.

c) Soit $x \in I$ auto-adjoint. On a :

$$\begin{aligned} |\bar{\tau}(x)| &\leq |\tau(\frac{x+|x|}{2})| + |\tau(\frac{x-|x|}{2})|, \\ &\leq C(\|\frac{x+|x|}{2}\|_I + \|\frac{x-|x|}{2}\|_I), \\ &\leq 2C\|x\|_I. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} |\bar{\tau}(x)| &\leq |\bar{\tau}(\frac{x+x^*}{2})| + |\bar{\tau}(\frac{x-x^*}{2})|, \\ &\leq 4C\|x\|_I. \end{aligned}$$

□

Exemples. 1. Toute mesure μ sur X définit une trace sur $L^1_\mu \cap L^\infty_\mu$.

2. La trace usuelle sur $\mathcal{L}^1$ est une trace au sens de la définition précédente. En dimension finie $\mathcal{L}^1$ correspond à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et toute trace est proportionnelle à Trace. Ce n'est plus le cas en dimension infinie comme le montre l'exemple de la trace de Dixmier.

2 Valeurs caractéristiques.

Définition 5 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. On appelle n-ième valeur caractéristique de T, le réel :*

$$\mu_n(T) = \inf\{\|T|_{E^\perp}\| \ ; \ dim E = n\}.$$

Lemme 3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \mu_n(|T|) &= \mu_n(T), \\ \operatorname{dist}(|T|, \mathcal{R}_n) &= \operatorname{dist}(T, \mathcal{R}_n). \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\|T\xi\| = \||T|\xi\| \ \forall \xi \in \mathcal{H}$, donc $\mu_n(|T|) = \mu_n(T)$. Maintenant, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. De l'inclusion $U\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_n$ on déduit que :

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{R}_n) = \operatorname{dist}(U|T|, \mathcal{R}_n) \leq \operatorname{dist}(U|T|, U\mathcal{R}_n) \leq \|U\| \operatorname{dist}(|T|, \mathcal{R}_n).$$

Mais $\|U\| \leq 1$, donc $\operatorname{dist}(T, \mathcal{R}_n) \leq \operatorname{dist}(|T|, \mathcal{R}_n)$. Puis, comme $|T| = U^*T$, on obtient de la même manière l'inégalité inverse. □

Proposition 3 (principe du min-max) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \mu_n(T) &= \operatorname{dist}(T, \mathcal{R}_n), \\ &= n+1-\text{ième valeur propre de } |T|. \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{K}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, il est C^*-stable par la proposition 1. En particulier, l'opérateur positif $|T|$ est compact. Par l'alternative de Fredholm, son spectre est alors formé d'une suite de valeurs propres, positives, de multiplicités finies et tendant vers 0. On peut ainsi les ranger en une suite décroissante $(\lambda_n)_{n\geq 0}$; ce qui permet de parler de "$n+1$-ième valeur propre de $|T|$".

Maintenant, le lemme 3 permet de se ramener au cas où T est positif. Il existe alors une base orthonormée $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ telle que $T\xi_n = \lambda_n \xi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, on a :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\xi_n\rangle\langle\xi_n|.$$

Pour tout $m \geq 1$, notons E_m le sous-espace vectoriel engendré par $\xi_0 \dots \xi_{m-1}$. Le projecteur E_n est donné par :

$$E_n = \sum_{k<n} |\xi_k\rangle\langle\xi_k|.$$

Comme on a :

$$T(1-E_n) = \sum_{k\geq n} \lambda_k |\xi_k\rangle\langle\xi_k|,$$

on voit que :

$$\|T|_{E_n^\perp}\| = \|T(1-E_n)\| = \lambda_n.$$

Mais $\dim E_n = n$ et $\mathrm{rg} T E_n \leq n$, donc :

$$\mu_n(T) \leq \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n) \leq \lambda_n.$$

Réciproquement, soit E est un sous espace de dimension n. Comme E_{n+1} est de dimension $n+1$, la restriction du projecteur E à E_{n+1} ne peut être injective. Il existe alors $\xi \in E^\perp$ tel que $\xi \in E_{n+1}$ et $\|\xi\| = 1$. Comme $\|T|_{E^\perp}\| \geq \|T\xi\|$ et $\xi \in E_{n+1}$, on a :

$$\|T\xi\|^2 = \sum_{k\leq n} \lambda_k^2 |\langle\xi|\xi_k\rangle|^2 \geq \lambda_n^2 \sum_{k\leq n} |\langle\xi|\xi_k\rangle|^2 \geq \lambda_n^2 \|\xi\|^2 \geq \lambda_n^2.$$

Il en résulte que $\|T|_{E^\perp}\| \geq \lambda_n$, puis que $\mu_n(T) \geq \lambda_n$.

D'autre part, soit R un opérateur de rang $\leq n$. On a :

$$\begin{aligned} \|T - R\| &\geq \sup\{\|(T-R)\xi\|; \xi \in \ker R \text{et} \|\xi\| \leq 1\} \\ &\geq \|T|_{\ker R}\|. \end{aligned}$$

Comme R est un isomorphisme linéaire de $\ker R^\perp$ sur $\mathrm{im}\, R$, le sous-espace $\ker R^\perp$ est de dimension $\leq n$. Il existe alors un sous-espace E de dimension n le contenant. Mais $\ker R$ étant fermé, on a :

$$E^\perp \subset (\ker R^\perp)^\perp = \ker R.$$

D'où on déduit que :

$$\|T - R\| \geq \|T|_{E^\perp}\| \geq \mu_n(T) \geq \lambda_n.$$

On ainsi montré que $\mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n) \geq \lambda_n$. □

Corollaire 1 *Soit $T \in \mathcal{K}$. Alors, $T \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si :*

$$\sum_{n\geq 0} \mu_n(T) < \infty.$$

Dans ce cas on a :

$$\|T\|_1 \;=\; \mathrm{Trace}\,|T| \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T).$$

Proposition 4 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, et soit $\mathcal{H}'$ un (autre) espace de Hilbert. Alors :*

a) $\mu_n(|T|) = \mu_n(T^*) = \mu_n(T)$.

b) Pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, on a :

$$\mu_n(ATB) \;\leq\; \|A\| \mu_n(T) \|B\|,$$

c) Pour $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ unitaire, on a :

$$\mu_n(U^* T U) = \mu_n(T).$$

Démonstration. Le lemme 3 dit que $\mu_n(|T|) = \mu_n(T)$. En outre, l'involution $T \mapsto T^*$ induisant une involution de $\mathcal{R}_n(\mathcal{H})$ on a :

$$\operatorname{dist}(T^*, \mathcal{R}_n) = \operatorname{dist}(T^*, \mathcal{R}_n^*) = \operatorname{dist}(T, \mathcal{R}_n).$$

D'où $\mu_n(T^*) = \mu_n(T)$.

b) Soit $R \in \mathcal{R}_n(\mathcal{H})$. Comme $\operatorname{rg}(ARB) \leq n$, on a :

$$\mu_n(ATB) \leq \|ATB - ARB\| \leq \|A\| \|T - R\| \|B\|$$

Il en résulte que $\mu_n(ATB) \ \leq \ \|A\| \mu_n(T) \|B\|$.

c) Comme $\|U^*\| = \|U\| = 1$, le b) montre que :

$$\mu_n(U^*TU) \leq \mu_n(T),$$

et que ;

$$\mu_n(T) = \mu_n(U(U^*TU)U^*) \leq \mu_n(U^*TU).$$

□

Définition 6 *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. On appelle trace partielle d'ordre N, le réel :*

$$\sigma_N(T) = \sum_{n<N} \mu_n(T).$$

Lemme 4 *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

i) $\sigma_N(T) = \sup\{\|TE\|_1 \ ; \ \dim E = N\}$.

ii) Si T est positif, on a :

$$\sigma_N(T) = \sup\{\operatorname{Trace} TE \ ; \ \dim E = N\}.$$

Démonstration. Si E est un projecteur orthogonal on a $||T|E| = |TE|$, car :

$$(TE)^*TE = ET^*TE = (|T|E)^*|T|E.$$

Il en résulte que les deux membres de la première égalité ne dépendent que de $|T|$. On peut ainsi supposer que T est positif.

Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormée telle que $T\xi_n = \mu_n(T)\xi_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Notons E_N le sous-espace vectoriel engendré par $\xi_0 \ldots \xi_{N-1}$. On a :

$$\operatorname{Trace} TE_N = \|TE_N\|_1 = \sum_{n<N} \mu_n(T) = \sigma_N(T).$$

Réciproquement, soit E est un sous espace de dimension N. Comme TE est de rang au plus égal à n, on a :

$$\mu_n(TE) = \operatorname{dist}(TE, \mathcal{R}_n) = 0 \qquad \forall n \geq N.$$

Par conséquent :

$$\operatorname{Trace} TE \leq \|TE\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(TE) = \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(TE).$$

Mais par la proposition 4, le dernier membre est majoré par :

$$\|E\| \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) \leq \sigma_N(T),$$

donc $\operatorname{Trace} TE \leq \sigma_N(T)$. □

Remarque. Pour $N \in \mathbb{N}$ non nul, σ_N est le sup d'une famille de semi-normes sur $\mathcal{K}$, donc c'est une une semi-norme sur $\mathcal{K}$. Mais comme $\mu_0(T) = \|T\|$, on a :

$$\|T\| \leq \sigma_N(T) \leq N\|T\|,$$

et par conséquent, σ_N est une norme sur $\mathcal{K}$ quie est équivalente à $\|.\|$.

Proposition 5 *Soit T_1 et T_2 des opérateurs compacts. Alors :*

a) On a :

$$\sigma_N(T_1 + T_2) \leq \sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2) \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

b) Si T_1 et T_2 sont positifs, on a :

$$\sigma_{N_1+N_2}(T_1 + T_2) \geq \sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2) \qquad \forall (N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Démonstration. a) σ_N est une norme sur $\mathcal{K}$; en particlier elle est sous-additive.

b) Pour i=1,2, soit E_i un sous espace de dimension N_i. Considérons un sous espace E de dimension $N = N_1 + N_2$ contenant $E_1 + E_2$. Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ un base orthonormée de $\mathcal{H}$ telle que ξ_n appartienne à E_1 pour $n < N_1$ et à E pour $n < N$. Comme T_1 est positif, on a :

$$\operatorname{Trace} T_1 E_1 = \sum_{n<N_1} \langle \xi_n | T_1 \xi_n \rangle \leq \sum_{n<N} \langle \xi_n | T_1 \xi_n \rangle = \operatorname{Trace} T_1 E.$$

De la même manière on montre que $\operatorname{Trace} T_2 E_2 \leq \operatorname{Trace} T_2 E$. D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{Trace} T_1 E_1 + \operatorname{Trace} T_2 E_2 &\leq \operatorname{Trace} T_1 E + \operatorname{Trace} T_2 E, \\ &\leq \sigma_N(T_1 + T_2). \end{aligned}$$

Mais T_1 et T_2 sont positifs, donc par le lemme 4 :

$$\sigma_{N_1+N_2}(T_1 + T_2) \geq \sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2).$$

□

3 Le C*-idéal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$

On construit l'espace $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ qui est le C^*-idéal sur lequel seront définies les traces de Dixmier. Le point crucial est le lemme suivant :

Lemme 5 *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\sigma_N(T) = \inf\{\|x\|_1 + N\|y\| \ ; \ (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \text{ et } x + y = T\}.$$

Démonstration. Posons :

$$\tilde{\sigma}_N(T) = \inf\{\|x\|_1 + N\|y\| \ ; \ (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \text{ et } x + y = T\}.$$

Si $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ sont tels que $x + y = T$, alors la sous-additivité de σ_N implique :

$$\sigma_N(T) \leq \sigma_N(x) + \sigma_N(y) \leq \|x\|_1 + N\|y\|.$$

D'où il résulte que $\sigma_N(T) \leq \tilde{\sigma}_N(T)$.

Réciproquement, soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$ de telle sorte que $|T|\xi_n = \mu_n(T)\xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$x_N = (|T| - \mu_N(T))E_N \quad \text{et}$$

$$y_N = \mu_n(T)E_N + |T|(1 - E_N),$$

où E_N est le projecteur spectral relatif aux N premières valeurs propres de $|T|$:

$$E_N = \sum_{n<N} (\mu_n(T) - \mu_n(T))|\xi_n\rangle\langle\xi_n|.$$

Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Alors, $T = Ux_N + Uy_N$ et $(Ux_N, Uy_N) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K}$. D'où :

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_N(T) &\leq \|Ux_N\|_1 + N\|Uy_N\|, \\
&\leq \|x_N\|_1 + N\|y_N\|, \\
&\leq \sum_{n<N} (\mu_n(T) - \mu_n(T)) + N\mu_n(T), \\
&\leq \sigma_N(T).
\end{aligned}$$

□

Remarque. Dans cette démonstration on a montré qu'il existait $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ de telle sorte que :

$$\|x\|_1 = \sigma_N(T) - N\mu_n(T) \qquad \text{et} \qquad \|y\| = N\mu_N(T).$$

Ce lemme permet de définir des traces partielles d'ordre réel :

Définition 7 *Pour $\lambda \geq 0$ et $T \in \mathcal{K}$, on appelle trace partielle de T d'ordre λ le réel :*

$$\sigma_\lambda(T) = \inf\{\|x\|_1 + \lambda\|y\| \ ; \ (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \ \textit{et} \ x + y = T\}.$$

Lemme 6 *Soit $T \in \mathcal{K}$. Alors, la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Soit λ et μ des réels positifs, et $\alpha \in [0, 1]$. Si $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ sont tels que $x + y = T$, alors :

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 + (\alpha\lambda + (1 - \alpha)\mu)\|y\| &\geq \alpha(\|x\|_1 + \lambda\|y\|) + (1 - \alpha)(\|x\|_1 + \lambda\|y\|), \\
&\geq \alpha\sigma_\lambda(T) + (1 - \alpha)\sigma_\mu(T).
\end{aligned}$$

D'où $\sigma_{\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu}(T) \geq \alpha\sigma_\lambda(T) + (1 - \alpha)\sigma_\mu(T)$. □

Proposition 6 *Soit $\lambda \geq 0$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\sigma_\lambda(T) &= \sigma_N(T) + \alpha\mu_n(T), \\
&= (1 - \alpha)\sigma_N(T) + \alpha\sigma_N(T), \\
&= \int_0^\lambda \mu_{[u]}(T)du \qquad , \qquad N = [\lambda], \alpha = \lambda - N.
\end{aligned}$$

Démonstration. Les trois dernières égalités résultent de la définition de $\sigma_N(T)$. Ceci dit, on sait par le lemme 6 que la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est concave, donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_\lambda(T) &\geq (1 - \alpha)\sigma_N(T) + \alpha\sigma_N(T), \\
&\geq \sigma_N(T) + \alpha\mu_n(T).
\end{aligned}$$

Réciproquement, on sait aussi par la remarque après le lemme 5, qu'il existe $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ tels que :

$$\|x\|_1 = \sigma_N(T) - N\mu_n(T) \qquad \text{et} \qquad \|y\| = N\mu_N(T).$$

Par conséquent $\sigma_\lambda(T) \leq \|x\|_1 + \lambda\|y\| \leq \sigma_N(T) + \alpha\mu_n(T)$. □

Remarques. 1. La proposition dit que la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est affine entre deux entiers consécutifs : c'est l'interpolation affine des traces partielles d'ordre entier.

2. Pour tout entier $N > 0$, la fonction σ_N est une norme sur $\mathcal{K}$ équivalente à $\|.\|$, donc pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\sigma_\lambda \ : \ T \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est aussi une norme sur $\mathcal{K}$ équivalente à $\|.\|$. En particulier, σ_λ est sous-additive.

De plus, on vérifie que la boule unité de $\mathcal{K}$ pour la norme σ_λ est l'envelloppe convexe de B_∞, la boule unité de $\mathcal{K}$ pour la norme $\|.\|$, et de $\lambda^{-1}B_1$ (B_1 désigne la boule unité de$\mathcal{L}^1$) :

$$B_{\sigma_\lambda} = \{T \in \mathcal{K} \ ; \ \sigma_\lambda(T) \leq 1\} = \mathrm{Conv}(B_\infty \cup \lambda^{-1}B_1)$$

3. La dernière égalité dit que :

$$\sigma_\lambda(T) = \int_{u \leq \lambda} \mu_{[u]}(T)du.$$

Ainsi, lorsque T est positif, $\sigma_\lambda(T)$ est un cut-off (intégral) de :

$$\mathrm{Trace}\, T = \int_0^\infty \mu_{[u]}(T)du,$$

par le paramètre scalaire λ.

Lemme 7 *Soit λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}_+$, et soit T_1 et T_2 dans $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$. Alors :*

$$\sigma_{\lambda_1+\lambda_2}(T_1 + T_2) \geq \sigma_{\lambda_1}(T_1) + \sigma_{\lambda_2}(T_2).$$

Démonstration. La proposition 5 dit que l'inégalité est vraie lorsque λ_1 et λ_2 sont tous deux des entiers.

Pour i=1,2, on pose $N_i = [\lambda_i]$ et $\alpha_i = \lambda_i - N_i$. On pose aussi $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $N = [\lambda]$ et $\alpha = \lambda - N$. On a soit $N = N_1 + N_2$, soit $N = N_1 + N_2 + 1$.

Supposons que $N = N_1 + N_2$. Alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, et on a :

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(T_1 + T_2) \quad &= \quad (\alpha_1 + \alpha_2)\sigma_{N_1+N_2+1}T_1 + T_2 \\ &\quad + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\sigma_{N_1+N_2}(T_1 + T_2). \end{aligned}$$

D'où on déduit que :

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(T_1 + T_2) \quad &\geq \quad \alpha_1(\sigma_{N_1+1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2)) \ + \ \alpha_2(\sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2+1}(T_2)) \\ &\quad + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)(\sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2)), \\ &\geq \quad (1 - \alpha_1)\sigma_{N_1}(T_1) \ + \ \alpha_1\sigma_{N_1+1}(T_1) \\ &\quad + (1 - \alpha_2)\sigma_{N_2}(T_2) \ + \ \alpha_2\sigma_{N_2+1}(T_2), \\ &\geq \quad \sigma_{\lambda_1}(T_1) \ + \ \sigma_{\lambda_2}(T_2). \end{aligned}$$

Si $N = N_1 + N_2 + 1$, alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$, et on a :

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(T_1 + T_2) \quad &= \quad (1 - \alpha_1 + 1 - \alpha_2)\sigma_{N_1+N_2+1}(T_1 + T_2) \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)\sigma_{N_1+1+N_2+1}(T_1 + T_2), \\ &\geq \quad (1 - \alpha_1)(\sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2)) \\ &\quad + (1 - \alpha_2)(\sigma_{N_1+1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2)) \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\sigma_{N_1+1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2)), \\ &\geq \quad (1 - \alpha_1)\sigma_{N_1}(T_1) \ + \ \alpha_1\sigma_{N_1}(T_1) \\ &\quad + (1 - \alpha_2)\sigma_{N_2}(T_1) \ + \ \alpha_2\sigma_{N_2}(T_2), \\ &\geq \quad \sigma_{\lambda_1}(T_1) \ + \ \sigma_{\lambda_2}(T_2). \end{aligned}$$

□

Définition 8 *On appelle interpolé réel de $\mathcal{L}^1$ et de $\mathcal{K}$, le sous-espace :*

$$\mathcal{L}^{(1,\infty)} = \{T \ ; \ \sup_{u \geq e} \frac{\sigma_u(T)}{\log u} < \infty\},$$

où $e = \exp(1)$ est le nombre de Neper.

Proposition 7 *$\mathcal{L}^1$ un C^*-idéal pour la norme :*

$$\|T\|_{(1,\infty)} = \sup_{u \geq e} \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}.$$

Démonstration. Tout d'abord, $\|.\|_{(1,\infty)}$ est le sup d'une famille de normes, donc cést une norm. D'autre part, par la proposition 6 on a :

$$\sup_{u\geq e}\frac{\sigma_u(T)}{\log u}\leq \sup_{N\geq 2}\sup_{0\leq\alpha\leq 1}\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\mu_N(T)+\alpha\mu_N(T)}{\log(N+\alpha)}\qquad \forall T\in\mathcal{K}.$$

Il résulte alors de la proposition 4 que $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et qu'on a :

$$\|ATB\|_{(1,\infty)}\leq \|A\|\|T\|_{(1,\infty)}\|B\|\qquad \forall T\in\mathcal{L}^{(1,\infty)},\ \forall(A,B)\in(\mathcal{L}^{(1,\infty)})^2.$$

En outre, par la proposition 3, l'idéal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est C^*-invariant et par la proposition 4 on a :

$$\||T|\|_{(1,\infty)}=\|T^*\|_{(1,\infty)}=\|T\|_{(1,\infty)}\qquad \forall T\in\mathcal{L}^{(1,\infty)}.$$

Maintenant, soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ qui est de Cauchy pour $\|.\|_{(1,\infty)}$. Alors, cette suite est de Cauchy pour chacune des normes σ_λ. Comme ces normes sont toutes équivalentes à $\|.\|$, on voit qu'il existe $T\in\mathcal{K}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_\lambda(T_n-T)=0\qquad \forall\lambda\geq e.$$

Soit $\epsilon>0$. Pour n et p assez grands on a :

$$\sigma_\lambda(T_n-T_p)<\epsilon\qquad \forall\lambda\geq e.$$

Faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\sigma_\lambda(T_n-T)<\epsilon\qquad \forall\lambda\geq e.$$

Il en résulte que $T\in\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ et que $\|T_n-T\|_{(1,\infty)}\to\infty$. □

Proposition 8 *Soit $\mathcal{H}'$ un autre espace de Hilbert et soit $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H}',\mathcal{H})$ inversible. Alors,γ_S, l'opérateur de conjugaison par S de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$,induit un isomorphisme continu de $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ vers $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$.*

Démonstration. Comme γ_S est une bijection de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$, d'inverse $\gamma_{S^{-1}}:T'\mapsto ST'S^{-1}$, il suffit de prouver que γ_S envoit continument $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$.

La proposition 4 dit que :

$$\mu_n(S^{-1}TS)\leq\|S^{-1}\|\|S\|\mu_n(T)\qquad \forall T\in\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}),\ \forall n\in\mathbb{N},$$

donc $\gamma_S(\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}))\subset\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$, et on a :

$$\|\gamma_S(T)\|_{(1,\infty)'}\leq\|S^{-1}\|\|S\|\|T\|_{(1,\infty)}\qquad \forall T\in\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}).$$

□

Remarque. 1. $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$est l'espace vectoriel normé dont la boule unité est :

$$B_{(1,\infty)}=\bigcap_{u\geq e}\log u.\,\mathrm{Conv}(B_\infty\cup u^{-1}B_1).$$

Ainsi on a les inclusions :

$$\mathcal{L}^1\ \subset\mathcal{L}^{(1,\infty)}\subset\mathcal{K},$$

et les inégalités (lorsqu'elles ont un sens) :

$$\|T\|\leq\|T\|_{(1,\infty)}\leq\|T\|_1.$$

2. En tant qu'idéal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est égal à l'idéal de Macaev :

$$\mathcal{L}^{1+}=\{T\ ;\ \mathcal{L}^{(1,\infty)}\sup_{N\geq 2}\frac{\sigma_N(T)}{\log N}<\infty\}.$$

Ce dernier est un C^*-idéal pour la norme :

$$\|T\|_{1+}=\sup_{N\geq 2}\frac{\sigma_N(T)}{\log N}.$$

Cependant cette norme ne coïncide pas avec la norme $\|.\|_{(1,\infty)}$, bien qu'elle lui soit équivalente.

4 Trace de Dixmier

On va maintenant se concentrer sur la divergence logarithmique de $\sigma_\lambda(T)$ et évaluer son expansion logarithmique. Ceci nous amènera à la trace de Dixmier.

Définition 9 *Pour $\lambda \geq e$ et $T \in \mathcal{K}$ on pose :*

$$\tau_\lambda(T) = \frac{1}{\log \lambda} \int_e^\lambda \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \frac{du}{u}$$

Remarques. a) Pour $T \in \mathcal{K}$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ est continue et s'interprète comme la moyenne de Cesāro de $\sigma_\lambda(T)/\log \lambda$ par rapport à la mesure de Haar $\frac{d\lambda}{\lambda}$ du groupe localement compact $\mathbb{R}_+^*$.

b) Si $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$, on a $\sigma_u(T) \leq \|T\|_{(1,\infty)} \log u \forall u \geq e$. D'où :

$$\tau_\lambda(T) \leq \|T\|_{(1,\infty)} \qquad \forall \lambda \geq e.$$

Par conséquent la fonction $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ appartient à $C_b([e, \infty))$.

Lemme 8 *Soit $\lambda \geq e$ et soit T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \cap \mathcal{L}^{(1,\infty)}$. Alors :*

$$|\tau_\lambda(T_1 + T_2) - \tau_\lambda(T_1) - \tau_\lambda(T_2)| \leq \|T_1 + T_2\|_{(1,\infty)} \frac{(\log\log \lambda + 2)\log 2}{\log \lambda}.$$

Démonstration. Comme les σ_u sont sous-additives on a :

$$\tau_\lambda(T_1 + T_2) \leq \tau_\lambda(T_1) + \tau_\lambda(T_2).$$

Il nous faut alors majorer la différence $\tau_\lambda(T_1) + \tau_\lambda(T_2) - \tau_\lambda(T_1 + T_2)$. Par la proposition 5 on a :

$$\sigma_{2u}(T_1 + T_2) \geq \sigma_u(T_1) + \sigma_u(T_2) \qquad \forall u \geq e.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \tau_\lambda(T_1) + \tau_\lambda(T_2) &\leq \frac{1}{\log \lambda} \int_e^\lambda \frac{\sigma_{2u}(T_1 + T_2)}{\log u} \frac{du}{u}, \\ &\leq \frac{1}{\log \lambda} \int_{2e}^{2\lambda} \frac{\sigma_u(T_1 + T_2)}{\log u/2} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\log \lambda)|\tau_\lambda(T_1 + T_2) - \tau_\lambda(T_1) - \tau_\lambda(T_2)| \leq \delta + \delta',$$

avec :

$$\delta = \int_e^\lambda \frac{\sigma_u(T_1 + T_2)}{\log u} \frac{du}{u} - \int_{2e}^{2\lambda} \frac{\sigma_u(T_1 + T_2)}{\log u} \frac{du}{u},$$

$$\delta' = \int_{2e}^{2\lambda} \sigma_u(T_1 + T_2)(\frac{1}{\log u/2} - \frac{1}{\log u}) \frac{du}{u}.$$

Grâce à la relation de Chasles et à l' inégalité triangulaire on obtient :

$$\delta \leq \int_e^{2e} \frac{\sigma_u(T_1 + T_2)}{\log u} \frac{du}{u} + \int_\lambda^{2\lambda} \frac{\sigma_u(T_1 + T_2)}{\log u} \frac{du}{u}$$

Comme $\sigma_u(T_1 + T_2) \leq \|T_1 + T_2\|_{(1,\infty)} \log u \quad \forall u \geq e$, on voit que :

$$\delta \leq \|T_1 + T_2\|_{(1,\infty)}(\int_e^{2e} \frac{du}{u} + \int_\lambda^{2\lambda} \frac{du}{u}) \leq 2\log 2 \|T_1 + T_2\|_{(1,\infty)}.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\delta' &\leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)} \int_{2e}^{2\lambda} \log u\left(\frac{1}{\log u/2} - \frac{1}{\log u}\right)\frac{du}{u}, \\
&\leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)} \int_{2e}^{2\lambda} \frac{\log 2}{\log u/2}\frac{du}{u}, \\
&\leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}(\log 2)(\log\log\lambda).
\end{aligned}$$

Rassemblant les inégalités on obtient le lemme. □

Ce lemme s'interprète en termes de C^*-algébre. Considérons la C^* algébre:

$$A = Q([e,\infty)) = C_b([e,\infty))/C_o([e,\infty)).$$

Le lemme 8 dit qu' on a une application additive de $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$ dans A :

$$\tau : T \longmapsto \text{classe de } (\tau_\lambda(T))_{\lambda\geq e}.$$

En fait :

Lemme 9 *Soit ω un état sur A (i.e. que ω est une forme linéaire positive sur A telle que $\omega(1)=1$). Alors, $\omega o \tau$ est un poids tracial sur $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$. La fonction $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$, donc $\tau(T) \in A_+$ et on a $\omega(\tau(T)) \geq 0$.
D'autre part, soit $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ unitaire. Par la proposition 4 on a :

$$\mu_n(U^*TU) = \mu_n(T) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où $\tau_\lambda(U^*TU) = \tau_\lambda(T) \quad \lambda \geq e$, et a fortiori, $\omega(\tau(U^*TU)) = \omega(\tau(T))$. □

Comme $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est un C^*-idéal, la proposition 2 s'applique : si ω un état sur A, le poids tracial $\omega o \tau$ sur $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$ se prolonge canoniquement en une trace sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$. On obtient ainsi la trace de Dixmier.

Définition 10 *Soit ω un état sur A. On appelle trace de Dixmier associée à ω, et on note Tr_ω, la trace sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ obtenue par prolongement linéaire du poids tracial $\omega o \tau$ sur $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$.*

Proposition 9 *Soit ω un état sur A. Alors :*

a) Tr_ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$.

b) Tr_ω ne dépend que de la topologie localement convexe de $\mathcal{H}$, et pas de son produit scalaire.

c) Soit $\mathcal{H}'$ un autre espace de Hilbert, et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}',\mathcal{H})$ inversible. Notons Tr'_ω la trace de Dixmier associé à ω sur $\mathcal{H}'$. Alors :

$$\mathrm{Tr}'_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(\infty,\infty)}(\mathcal{H}).$$

Démonstration. a) Soit $T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$. D'après la remarque a) après la définition 9, on a :

$$\tau_\lambda(T) \leq \|T\|_{(1,\infty)} \qquad \forall\lambda \geq e.$$

Par conséquent, dans A, on a :

$$0 \leq \tau(T) \leq \|\tau(T)\| \leq \|T\|_{(1,\infty)}.$$

On en déduit que :

$$0 \leq \omega(\tau(T)) \leq \|T\|_{(1,\infty)}\omega(1) \leq \|T\|_{(1,\infty)}.$$

De la proposition 2.c), il résulte alors que Tr_ω, le pronlegement linéaire du poids tracial $\omega o \tau$, est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$.

b) Soit $\langle .|. \rangle'$ un autre produit scalaire sur $\mathcal{H}$ définissant la même topologie que $\langle .|. \rangle$. Il existe alors $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inversible tel que :

$$\langle \xi | \eta \rangle' = \langle S\xi | S\eta \rangle \qquad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2.$$

Notons $\mathcal{H}'$ l'espace de Hilbert pour ce produit scalaire, et Tr'_ω la trace de Dixmier associée à ω sur $\mathcal{H}'$. Soit $T \in \mathcal{K}_+$. Alors $S^{-1}TS$ est un opérateur compact de $\mathcal{H}$, qui est est positif relativement à $\langle .|. \rangle'$, et qui a les mêmes valeurs propres que T. Il en résulte que ses valeurs caractéristiques relativement à $\langle .|. \rangle'$ sont :

$$\mu_0(T), \mu_1(T), \ldots, \mu_n(T), \ldots.$$

On en déduit que $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}') = \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$, et qu'on a :

$$\mathrm{Tr}'_\omega(T) = \mathrm{Tr}_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})_+.$$

D'où $\mathrm{Tr}'_\omega = \mathrm{Tr}_\omega$ par linéarité.

c) La proposition 8 dit que $S^{-1}\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})S = \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$. De plus, le b) ci-dessus, permet de remplacer le produit scalaire de $\mathcal{H}'$ par :

$$(\xi, \eta) \longmapsto \langle S\xi | S\eta \rangle.$$

On est ainsi ramené au cas où S est unitaire. Maintenant si $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})_+$, alors $S^{-1}TS$ appartient à $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')_+$ et a les mêmes valeurs propres que T, et par conséquent, $\mathrm{Tr}'_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$. Il en résulte que :

$$\mathrm{Tr}'_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(\infty,\infty)}(\mathcal{H}).$$

$\square$

Définition 11 *Soit $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$. On dit que T est mesurable si la valeur de $\mathrm{Tr}_\omega T$ est indépendante de l'état ω. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des opérateurs mesurables. On définit alors $⨍$ comme la forme linéaire sur $\mathcal{M}$ telle que :*

$$⨍ T = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \text{pour } T \in \mathcal{M} \textit{ textupet } \omega \text{ état sur } A.$$

Proposition 10 *On a les propriètés suivantes :*

a) $\mathcal{M}$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ qui ne dépend pas du produit scalaire de $\mathcal{H}$.

b) Soit $\mathcal{H}'$ un autre espace de Hilbert, et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ est inversible. Alors, $S^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{H})S = \mathcal{M}(\mathcal{H}')$ et on a :

$$⨍_{\mathcal{H}'} S^{-1}TS = ⨍_{\mathcal{H}} T \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(\infty,\infty)}(\mathcal{H}).$$

Démonstration. On a :

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \bigcap_{\omega, \omega' \text{ états sur } A} \{T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}) \ ; \ \mathrm{Tr}_\omega(T) = \mathrm{Tr}_{\omega'}(T)\}.$$

Par conséquent, la proposition résulte de la proposition 9. $\square$

Lemme 10 *Les états sur A séparent les points.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Il s'agit de montrer l'existence d'un état ω sur A tel que $\omega(x) \neq 0$. Si ω est un état sur A, alors $\omega(\frac{x+x^*}{2})$ est réel et est égal à la partie réelle de $\omega(x)$. On peut ainsi supposer que x est auto-adjoint. De plus, quitte à changer x en $-x$, on peut se ramener au cas où $x \notin A_+$.

Maintenant, soit B l'espace de Banach *réel* formé des élèments auto-adjoints de A et munit de la norme induite. Appliquons le théorème de Hanh-Banach dans B au convexe A_+ et à C le convexe compact engendré par -1 et x : il existe une forme linéaire ϕ sur B et des réels $\alpha < \beta$ tels que :

$$\phi(A_+) < \alpha \qquad \text{et} \qquad \phi(C) > \beta.$$

En particulier, $\phi(A_+)$ est un sous-cône strict de $\mathbb{R}$. Or $\phi(1) \neq \phi(-1)$, donc $\phi(A_+)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et nécessairement $\phi(A_+) = \mathbb{R}_+$. Il en résulte, d'une part que $\phi(1)$ et $\phi(x)$ sont non nuls, et d'autre part que $\phi|_{A_+}$ est un poids sur A_+. Appliquant la proposition 2 on peut alors prolonger ϕ en une forme linéaire positive $\bar{\phi}$ de sorte que :

$$\omega = \frac{\bar{\phi}}{\phi(1)},$$

est un état sur A tel que $\omega(x) \neq 0$. □

Proposition 11 *On a les propriètés suivantes :*

a) Soit $T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$. Alors :

$$(T \text{ mesurable et } \fint T = L) \iff (\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = L).$$

b) Soit $T \in \mathcal{K}$. Supposons que T est positif et que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = L$$

Alors T est mesurable et $\operatorname{Tr}_\omega T = L$.

c) Le noyau de $\fint$ contient $\mathcal{L}^1$.

Démonstration. a) Si $\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = L$, alors $\tau(T) = L$, et pour tout état ω sur A on a :

$$\operatorname{Tr}_\omega(T) = \omega(\tau(T)) = \omega(L) = L.$$

Autrement dit, $T \in \mathcal{M}$ et $\fint T = L$.

Réciproquement, supposons que T est mesurable et que $L = \fint(T)$. Alors pour tout état ω sur A on a :

$$\omega(\tau(T) - L) = \operatorname{Tr}_\omega(T) - L = 0.$$

Comme par le lemme 10 les états sur A séparent les points, on en déduit que $\tau(T) = L$. D'où $\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = L$.

b) Soit N un entier ≥ 2. Alors, pour tout $\lambda \in [N, N+1]$, on a :

$$\left(\frac{\log N}{\log(N+1)}\right)\frac{\sigma_N(T)}{\log N} \leq \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda} \leq \left(\frac{\log(N+1)}{\log N}\right)\frac{\sigma_N(T)}{\log N}$$

Par conséquent $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda} = L$. D'où :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\log\lambda} \int_e^\lambda \frac{\sigma_u(T)}{\log u}\frac{du}{u} = L.$$

Il résulte alors du a) ci-dessus que T est mesurable et que $\fint T = L$.

c) Si $T \in \mathcal{L}_+^1$, alors :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T)$$

Le b) ci-dessus dit alors que $T \in \mathcal{M}$ et que $\fint T = 0$. Comme $\mathcal{L}^1$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, la proposition 1 et le lemme 2 disent que tout élèment de $\mathcal{L}^1$ est combinaison linéaire d'élèments $\mathcal{L}_+^1$. Il en résulte que $\mathcal{L}^1$ est contenu dans le noyau de $\fint$. □

Proposition 12 *Soit Δ un opérateur "non borné" tel que $\Delta \geq c > 0$, et tel que :*

$$\operatorname{Trace} e^{-t\Delta} \sim \alpha t^{-p} \qquad \text{lorsque } t \to 0^+.$$

Alors Δ^{-p} est un opérateur mesurable et on a :

$$\fint \Delta^{-p} = \frac{\alpha}{\Gamma(p+1)}.$$

Démonstration. Par hypothèse $e^{-\Delta}$ est un opérateur à trace. Il est donc compact. Comme il est positif, il existe une base orthonormée $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ telle que :

$$e^{-\Delta}\xi_n = \mu_n(e^{-\Delta})\xi_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ecrivons $\mu_n(e^{-\Delta}) = e^{\lambda_n}$ où $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. Par calcul fonctionnel, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta\xi_n & = & \lambda_n\xi_n, \\ \Delta^{-p}\xi_n & = & \lambda_n^{-p}\xi_n, \\ e^{-t\Delta}\xi_n & = & e^{-t\lambda_n}\xi_n. \end{array}$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\|\Delta^{-p}\xi_n\| = \lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, l'opérateur Δ^{-p} est compact et on a :

$$\mu_n(\Delta^{-p}) = \lambda_n^{-p} \qquad \forall \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n\geq 0} e^{-t\lambda_n} = \operatorname{Trace} e^{-t\Delta} \sim \alpha t^{-p} \qquad \text{lorsque } t \to 0^+.$$

Il résulte alors du théorème tauberien d'Hardy-Littlewood (cf. [An] et [Ha]) qu'alors on a :

$$\mu_n(\Delta^{-p}) = \lambda_n^{-p} \sim \frac{\alpha n^{-1}}{\Gamma(p+1)} \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

D'où on déduit :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(\Delta^{-p}) = \frac{\alpha}{\Gamma(p+1)}$$

Il en résulte que Δ^{-p} est un opérateur mesurable et qu'on a :

$$⨍(T) = \frac{\alpha}{\Gamma(p+1)}.$$

□

Exemple. Soit Δ le laplacien (positif) sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. On regarde Δ comme un opérateur "non borné" positif sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^n)$. L'analyse de Fourier dit qu'une base orthonormée de cet Hilbert est fournie par les fonctions :

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik.x} \qquad x \in \mathbb{T}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Dans cette base on a $\Delta e_k = |k|^2 e_k \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^n$. On en déduit que pour $t > 0$ on a :

$$e^{-t} \operatorname{Trace} e^{-t(I+\Delta)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{-t|k|^2} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-tk^2})^n$$

On sait que :

$$\begin{array}{rcl} |\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}dx & - & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-tk^2}| \leq 1, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}dx & = & \sqrt{\frac{\pi}{t}}. \end{array}$$

D'où :

$$\operatorname{Trace} e^{-t(I+\Delta)} \sim (\frac{\pi}{t})^{\frac{n}{2}} \qquad \text{lorsque } t \to 0^+.$$

Il en résulte que $(I+\Delta)^{\frac{-n}{2}}$ est mesurable et qu'on a :

$$\fint (I+\Delta)^{\frac{-n}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Plus généralement soit M une variété compact riemannienne de dimension n, et P un opérateur pseudo-différentiel sur M d'ordre $-n$. Alors P s'étend en un opérateur compact de l'espace de Hilbert $L^2(M)$. On montre (cf [Co2]) que cet opérateur est mesurable et qu'on a :

$$\fint P = \frac{1}{n}\operatorname{Res}(P).$$

Ici $\operatorname{Res}(P)$ est le résidu de Wodzicki de P (ou résidu non commutatif) ; il est donné par la formule :

$$\operatorname{Res}(P) = (2\pi)^{-n}\int_{S^*M} \sigma_{-n}(P)(x,\xi)dxd\xi,$$

où S^*M est le fibré en sphère du fibré cotangent T^*M.

Bibliographie

[An] K. Ananda-Rau *On Dirichlet's Series With Positive Coefficients.* Ricidenconti di Circ. Mat. di Palermo **54** (1929)

[Co1] A. Connes *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1994

[Co2] A. Connes *The Action in Noncommutative Geometry.* Comm. in Math. Phys. **117** (1988).

[CM] A. Connes et H. Moscovici *The Local Index Formula in Noncommutative Geometry.* Preprint IHES/M/95/19.

[Di] J. Dixmier *Les C^*-algèbres et Leurs Représentations.* Gauthiers-Villars, Paris, 1964.

[GH] I.C. Gohberg et M.G. Kreĭn. *Introduction to the Theory of Linear Nonseladjoint Operators.* Trans. Math. Monogr., 18, Providence.

[HL] G.H. Hardy. *Divergent Series.* Clarendon Press, 1949.