MÉMOIRE DE DEA : TRACE DE DIXMIER

Raphal PONGE

octobre 95

Abstract

Ce mémoire présente de manière détaillée la construction de la trace de Dixmier donnée en appendice dans [CM].

Notations

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert *séparable* muni d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ antilinéaire à droite. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_n$ le sous espace de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ formé des opérateurs de rang $\leq n$.

Si E est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, on note aussi E le projecteur orthogonal associé.

Si ξ est un vecteur de norme 1, on note $|\xi\rangle\langle\xi|$ le projecteur orthogonal sur la droite engendrée par ξ (notation de Dirac).

On note $\mathcal{K}$ l'idéal bilatère fermé des opérateurs compacts de $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{L}^1$ l'idéal bilatère des opérateurs à trace de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On rappelle que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur à trace, alors pour toute base orthonormée $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \eta_n | T\eta_n \rangle,$$

est absolument convergente et sa somme est indépendante du choix du choix de la base$(\xi_n)_{n\geq 0}$. On note cette somme $\mathrm{Trace}(T)$. Cela définit une trace sur $\mathcal{L}^1$, et l'application définie par :

$$\|T\|_1 \;=\; \mathrm{Trace}(|T|) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^1,$$

est une norme, la norme trace, qui fait de $\mathcal{L}^1$ un espace de Banach.

1 Traces sur une C^*-algèbre

Dans toute cette section on désigne par A une C^*-algèbre *unifère*, et par X un espace topologique localement compact. De plus, on note A_+ le cne (positif) des élèments positifs de A.

Définition 1 *On dit qu'une partie B de A est C^*-stable si, pour tout $x \in B$, on a aussi $x^* \in B$ et $|x| \in B$.*

Proposition 1 *Tout idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une partie C^*-stable.*

Démonstration. Soit I un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, et soit $T \in I$. Notons $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Comme I est un idéal bilatère, les opérateurs $|T| = U^*T$ et $T^* = U^*TU^*$ sont dans I. □

Définition 2 *On appelle C^*-idéal de A tout idéal bilatère I de A qui est C^*-stable et qui est munit d'une norme $\| \,.\, \|_I$ pour laquelle I est un espace de Banach, de telle sorte que :on ait :*

$$\||x|\|_I = \|x^*\|_I = \|x\|_I \qquad \forall x \in I,$$

et qu'on ait :

$$\|axb\|_I \leq \|a\|\|x\|_I\|b\| \qquad \forall x \in I,\ \forall (a,b) \in A^2.$$

Exemples. 1. Grce à la théorie des unités approchées, on montre que tout idéal bilatère fermé de A est C^*-stable. Il en résulte qu'un tel idéal est un C^*-idéal pour la norme de A.

2. Soit μ une mesure de Radon sur X et $p \in [1, \infty[$. Alors, $L^p_\mu(X) \cap L^\infty_\mu(X)$, vu comme idéal bilatère de la C^*-algèbre $L^\infty_\mu(X)$, est un C^*-idéal pour la norme définie par :

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in L^p_\mu(X).$$

3. *Idéaux de Schatten.* Soit $p \in [1, \infty[$. Alors, l'ensemble $\mathcal{L}^p$ des opérateurs compacts tels que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p \ \leq\ \infty,$$

o $(\mu_n(T)_n)_{n\geq 0}$ est la suite des valeurs propres de $|T|$, est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. C'est un C^*-idéal pour la norme donnée par :

$$\|T\|_p \ = \ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall T \in \mathcal{L}^p.$$

Dans toute la suite de cette section, on désigne par I un idéal bilatère de A et on note $I_+ = I \cap A_+$ le cne des élèments positifs de I.

Définition 3 *On appelle trace sur I toute forme linéaire positive τ sur I telle que :*

$$\tau(ax) = \tau(xa) \qquad \forall x \in I \ \forall a \in A.$$

Définition 4 *On appelle poids sur I_+ toute application $\tau : I_+ \to \mathbb{R}_+$ qui est additive et homogène. On dit que le poids τ est tracial si, pour tout $x \in I_+$ et $u \in A$ unitaire, on a :*

$$\tau(u^*xu) = \tau(x).$$

Lemme 1 *Tout élèment de A est combinaison linéaire de quatre unitaires.*

Démonstration. Comme pour tout $x \in A$ on a :

$$x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i\frac{1}{2i}(x - x^*),$$

on se ramène à montrer que tout élément auto-adjoint de A est combinaison linéaire de 2 unitaires.

Soit $x \in A$ auto-adjoint. Quitte à diviser x par sa norme, on peut en outre supposer que x est de norme ≤ 1. Dans ce cas, son spectre est inclus dans [-1,1], et les applications :

$$t \mapsto \ \frac{t \pm \sqrt{1 - t^2}}{2},$$

envoient $Sp_A x$ dans U(1), le groupe des nombres complexes de module égale à 1. Par calcul fonctionnel continu, les élèments de A :

$$u_+ = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{2} \quad \text{et} \quad u_- = \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{2},$$

sont alors deux unitaires dont la somme est égale à x. $\square$

Lemme 2 *Soit I un idéal bilatère C^*-stable. Alors, tout $x \in I$ admet une écriture de la forme :*

$$x \ = \ (x_1 - x_2) \ + \ i(x_3 - x_4),$$

o les x_j appartiennent à I_+.

Démonstration. Soit $x \in I$. On a :

$$x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i\frac{1}{2i}(x - x^*).$$

Mais comme I est C^*-stable, $\frac{1}{2}(x + x^*)$ et $\frac{1}{2i}(x - x^*)$ sont des élèments auto-adjoints de I. Il en résulte qu'il suffit de montrer que tout élèment auto-adjoint de I est égal à la différence de deux éléments de I_+.

Maintenant soit $x \in I$ auto-adjoint. Comme I est C^*-stable, les èlèments de A :

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}(x \pm |x|),$$

sont des èlèments de I dont la somme est égale à x. De plus, ils sont auto-adjoints et leurs spectres sont inclus dans $\mathbb{R}_+$, donc ils appartiennent à I_+. $\square$

Proposition 2 *Soit I un idéal bilatère C^*-stable de A, et τ un poids sur I_+. Alors :*

a) τ s'étend de manière unique en une forme linéaire $\bar{\tau}$ sur I dans B.

b) Si τ est tracial, alors $\bar{\tau}$ est une trace sur I.

c) Supposons que I soit un C^*-idéal pour la norme $\|.\|_I$, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\tau(x)| \leq C\|x\|_I \qquad \forall x \in I_+.$$

Alors, $\bar{\tau}$ est une forme linéaire continue sur I (pour $\|.\|_I$).

Démonstration. a) Soit $x \in I$, et soit deux écritures de x données par par le lemme 2 :

$$x = (x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4),$$
$$x = (x'_1 - x'_2) + i(x'_3 - x'_4),$$

o les x_j et les x'_j appartiennet à I_+. Comme :

$$\frac{1}{2}(x + x^*) = x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2,$$

on a :

$$x_1 + x'_2 = x'_1 + x_2.$$

Appliquant τ dans cette dernière égalité, et utilisant l' additivité de τ, on obtient :

$$\tau(x_1) - \tau(x_2) = \tau(x'_1) - \tau(x'_2).$$

De mme, on a :

$$\tau(x_3) - \tau(x_4) = \tau(x'_3) - \tau(x'_4).$$

Par conséquent, le nombre complexe :

$$\bar{\tau}(x) = \tau(x_1) - \tau(x_2) + i(\tau(x_3) - \tau(x_4)),$$

ne dépend que de x et pas des x_j. On obtient ainsi une application $\bar{\tau}$ de I dans $\mathbb{C}$ qui est additive et homogène, et qui plus vérifie les égalités :

$$\bar{\tau}(\epsilon x) = \epsilon\bar{\tau}(x) \qquad \forall x \in I,\ \forall \epsilon \in \{\pm 1, \pm i\}.$$

Il en résulte que $\bar{\tau}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Par construction, c'est l'unique forme linéaire sur I qui prolonge τ .

b) Supposons que τ soit un poids tracial, et soit $u \in A$ unitaire. L'unitaire invariance de τ montre que les applications de I dans $\mathbb{C}$:

$$x \longmapsto \bar{\tau}(x) \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \bar{\tau}(u^* x u),$$

sont deux prolongements linéaires de τ sur I. Par conséquent, elles concident sur I. On en déduit que :

$$\bar{\tau}(ux) = \bar{\tau}(xu) \qquad \forall x \in I.$$

Or, par le lemme 1 tout élément de A est combinaison linéaire d'unitaires, donc par linéarité $\bar{\tau}$ est une trace sur I.

c) Soit $x \in I$ auto-adjoint. On a :

$$\begin{aligned}
|\bar{\tau}(x)| &\leq |\tau(\frac{x+|x|}{2})| + |\tau(\frac{x-|x|}{2})|, \\
&\leq C(\|\frac{x+|x|}{2}\|_I + \|\frac{x-|x|}{2}\|_I), \\
&\leq 2C\|x\|_I.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
|\bar{\tau}(x)| &\leq |\bar{\tau}(\frac{x+x^*}{2})| + |\bar{\tau}(\frac{x-x^*}{2})|, \\
&\leq 4C\|x\|_I.
\end{aligned}$$

□

Exemples. 1. Toute mesure μ sur X définit une trace sur $L^1_\mu \cap L^\infty_\mu$.

2. La trace usuelle sur $\mathcal{L}^1$ est une trace au sens de la définition précédente. En dimension finie $\mathcal{L}^1$ correspond à $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et toute trace est proportionnelle à Trace. Ce n'est plus le cas en dimension infinie comme le montre l'exemple de la trace de Dixmier.

2 Valeurs caractéristiques.

Définition 5 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. On appelle n-ième valeur caractéristique de T, le réel :*

$$\mu_n(T) = \inf\{\|T|_{E^\perp}\| \ ; \ dim E = n\}.$$

Lemme 3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \mu_n(|T|) &= \mu_n(T), \\ \mathrm{dist}(|T|, \mathcal{R}_n) &= \mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n). \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\|T\xi\| = \||T|\xi\| \ \forall \xi \in \mathcal{H}$, donc $\mu_n(|T|) = \mu_n(T)$. Maintenant, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. De l'inclusion $U\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_n$ on déduit que :

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n) = \mathrm{dist}(U|T|, \mathcal{R}_n) \leq \mathrm{dist}(U|T|, U\mathcal{R}_n) \leq \|U\| \, \mathrm{dist}(|T|, \mathcal{R}_n).$$

Mais $\|U\| \leq 1$, donc $\mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n) \leq \mathrm{dist}(|T|, \mathcal{R}_n)$. Puis, comme $|T| = U^*T$, on obtient de la mme manière l'inégalité inverse. $\square$

Proposition 3 (principe du min-max) *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \mu_n(T) &= \mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n), \\ &= n + 1 - \text{ième valeur propre de } |T|. \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{K}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, il est C^*-stable par la proposition 1. En particulier, l'opérateur positif $|T|$ est compact. Par l'alternative de Fredholm, son spectre est alors formé d'une suite de valeurs propres, positives, de multiplicités finies et tendant vers 0. On peut ainsi les ranger en une suite décroissante $(\lambda_n)_{n\geq 0}$; ce qui permet de parler de "$n + 1$-ième valeur propre de $|T|$".

Maintenant, le lemme 3 permet de se ramener au cas o T est positif. Il existe alors une base orthonormée $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ telle que $T\xi_n = \lambda_n \xi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, on a :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\xi_n\rangle\langle\xi_n|.$$

Pour tout $m \geq 1$, notons E_m le sous-espace vectoriel engendré par $\xi_0 \ldots \xi_{m-1}$. Le projecteur E_n est donné par :

$$E_n = \sum_{k<n} |\xi_k\rangle\langle\xi_k|.$$

Comme on a :

$$T(1 - E_n) = \sum_{k\geq n} \lambda_k |\xi_k\rangle\langle\xi_k|,$$

on voit que :

$$\|T|_{E_n^\perp}\| = \|T(1-E_n)\| = \lambda_n.$$

Mais $\dim E_n = n$ et $\mathrm{rg} T E_n \leq n$, donc :

$$\mu_n(T) \leq \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n) \leq \lambda_n.$$

Réciproquement, soit E est un sous espace de dimension n. Comme E_{n+1} est de dimension $n+1$, la restriction du projecteur E à E_{n+1} ne peut tre injective. Il existe alors $\xi \in E^\perp$ tel que $\xi \in E_{n+1}$ et $\|\xi\| = 1$. Comme $\|T|_{E^\perp}\| \geq \|T\xi\|$ et $\xi \in E_{n+1}$, on a :

$$\|T\xi\|^2 = \sum_{k\leq n} \lambda_k^2 |\langle \xi|\xi_k\rangle|^2 \geq \lambda_n^2 \sum_{k\leq n} |\langle \xi|\xi_k\rangle|^2 \geq \lambda_n^2 \|\xi\|^2 \geq \lambda_n^2.$$

Il en résulte que $\|T|_{E^\perp}\| \geq \lambda_n$, puis que $\mu_n(T) \geq \lambda_n$.

D'autre part, soit R un opérateur de rang $\leq n$. On a :

$$\begin{aligned} \|T-R\| &\geq \sup\{\|(T-R)\xi\|; \xi \in \ker R \text{et} \|\xi\| \leq 1\} \\ &\geq \|T|_{\ker R}\|. \end{aligned}$$

Comme R est un isomorphisme linéaire de $\ker R^\perp$ sur $\mathrm{im}\, R$, le sous-espace $\ker R^\perp$ est de dimension $\leq n$. Il existe alors un sous-espace E de dimension n le contenant. Mais $\ker R$ étant fermé, on a :

$$E^\perp \subset (\ker R^\perp)^\perp = \ker R.$$

D'o on déduit que :

$$\|T-R\| \geq \|T|_{E^\perp}\| \geq \mu_n(T) \geq \lambda_n.$$

On ainsi montré que $\mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n) \geq \lambda_n$. □

Corollaire 1 *Soit $T \in \mathcal{K}$. Alors, $T \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si :*

$$\sum_{n\geq 0} \mu_n(T) < \infty.$$

Dans ce cas on a :

$$\|T\|_1 \;=\; \mathrm{Trace}(|T|) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T).$$

Proposition 4 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, et soit $\mathcal{H}'$ un (autre) espace de Hilbert. Alors :*

a) $\mu_n(|T|) = \mu_n(T^*) = \mu_n(T)$.

b) Pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ *et* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$*, on a :*

$$\mu_n(ATB) \ \leq \ \|A\|\mu_n(T)\|B\|,$$

c) Pour $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ *unitaire, on a :*

$$\mu_n(U^*TU) = \mu_n(T).$$

Démonstration. Le lemme 3 dit que $\mu_n(|T|) = \mu_n(T)$. En outre, l'involution $T \mapsto T^*$ induisant une involution de $\mathcal{R}_n(\mathcal{H})$ on a :

$$\mathrm{dist}(T^*, \mathcal{R}_n) = \mathrm{dist}(T^*, \mathcal{R}_n^*) = \mathrm{dist}(T, \mathcal{R}_n).$$

D'o $\mu_n(T^*) = \mu_n(T)$.

b) Soit $R \in \mathcal{R}_n(\mathcal{H})$. Comme $\mathrm{rg}(ARB) \leq n$, on a :

$$\mu_n(ATB) \leq \|ATB - ARB\| \leq \|A\|\|T - R\|\|B\|$$

Il en résulte que $\mu_n(ATB) \ \leq \ \|A\|\mu_n(T)\|B\|$.

c) Comme $\|U^*\| = \|U\| = 1$, le b) montre que :

$$\mu_n(U^*TU) \leq \mu_n(T),$$

et que ;

$$\mu_n(T) = \mu_n(U(U^*TU)U^*) \leq \mu_n(U^*TU).$$

□

Définition 6 *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* $T \in \mathcal{K}$*. On appelle trace partielle d'ordre N, le réel :*

$$\sigma_N(T) = \sum_{n<N} \mu_n(T).$$

Lemme 4 *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* $T \in \mathcal{K}$*. Alors :*

i) $\sigma_N(T) = \sup\{\|TE\|_1 \ ; \ \dim E = N\}$.

ii) Si T est positif, on a :

$$\sigma_N(T) = \sup\{\mathrm{Trace}(TE) \ ; \ \dim E = N\}.$$

Démonstration. Si E est un projecteur orthogonal on a $||T|E| = |TE|$, car :

$$(TE)^*TE = ET^*TE = (|T|E)^*|T|E.$$

Il en résulte que les deux membres de la première égalité ne dépendent que de $|T|$. On peut ainsi supposer que T est positif.

Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormée telle que $T\xi_n = \mu_n(T)\xi_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Notons E_N le sous-espace vectoriel engendré par $\xi_0 \ldots \xi_{N-1}$. On a :

$$\mathrm{Trace}(TE_N) = \|TE_N\|_1 = \sum_{n<N} \mu_n(T) = \sigma_N(T).$$

Réciproquement, soit E est un sous espace de dimension N. Comme TE est de rang au plus égal à n, on a :

$$\mu_n(TE) = \mathrm{dist}(TE, \mathcal{R}_n) = 0 \qquad \forall n \geq N.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Trace}(TE) \leq \|TE\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(TE) = \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(TE).$$

Mais par la proposition 4, le dernier membre est majoré par :

$$\|E\| \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) \leq \sigma_N(T),$$

donc $\mathrm{Trace}(TE) \leq \sigma_N(T)$. □

Remarque. Pour $N \in \mathbb{N}$ non nul, σ_N est le sup d'une famille de semi-normes sur $\mathcal{K}$, donc c'est une une semi-norme sur $\mathcal{K}$. Mais comme $\mu_0(T) = \|T\|$, on a :

$$\|T\| \leq \sigma_N(T) \leq N\|T\|,$$

et par conséquent, σ_N est une norme sur $\mathcal{K}$ quie est équivalente à $\|.\|$.

Proposition 5 *Soit T_1 et T_2 des opérateurs compacts. Alors :*

a) On a :

$$\sigma_N(T_1 + T_2) \leq \sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2) \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

b) Si T_1 et T_2 sont positifs, on a :

$$\sigma_{N_1+N_2}(T_1 + T_2) \geq \sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2) \qquad \forall (N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Démonstration. a) σ_N est une norme sur $\mathcal{K}$; en particlier elle est sous-additive.

b) Pour i=1,2, soit E_i un sous espace de dimension N_i. Considérons un sous espace E de dimension $N = N_1 + N_2$ contenant $E_1 + E_2$. Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ un base orthonormée de $\mathcal{H}$ telle que ξ_n appartienne à E_1 pour $n < N_1$ et à E pour $n < N$. Comme T_1 est positif, on a :

$$\text{Trace}(T_1 E_1) = \sum_{n<N_1} \langle \xi_n | T_1 \xi_n \rangle \leq \sum_{n<N} \langle \xi_n | T_1 \xi_n \rangle = \text{Trace}(T_1 E).$$

De la mme manière on montre que $\text{Trace}(T_2 E_2) \leq \text{Trace}(T_2 E)$. D'o :

$$\begin{aligned} \text{Trace}(T_1 E_1) + \text{Trace}(T_2 E_2) &\leq \text{Trace}(T_1 E) + \text{Trace}(T_2 E), \\ &\leq \sigma_N(T_1 + T_2). \end{aligned}$$

Mais T_1 et T_2 sont positifs, donc par le lemme 4 :

$$\sigma_{N_1+N_2}(T_1 + T_2) \geq \sigma_{N_1}(T_1) + \sigma_{N_2}(T_2).$$

□

3 Le C*-idéal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$

On construit l'espace $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ qui est le C^*-idéal sur lequel seront définies les traces de Dixmier. Le point crucial est le lemme suivant :

Lemme 5 *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\sigma_N(T) = \inf\{\|x\|_1 + N\|y\| \ ; \ (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \text{ et } x + y = T\}.$$

Démonstration. Posons :

$$\tilde{\sigma}_N(T) = \inf\{\|x\|_1 + N\|y\| \ ; \ (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \text{ et } x + y = T\}.$$

Si $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ sont tels que $x + y = T$, alors la sous-additivité de σ_N implique :

$$\sigma_N(T) \leq \sigma_N(x) + \sigma_N(y) \leq \|x\|_1 + N\|y\|.$$

D'o il résulte que $\sigma_N(T) \leq \tilde{\sigma}_N(T)$.

Réciproquement, soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$ de telle sorte que $|T|\xi_n = \mu_n(T)\xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$x_N = (|T| - \mu_N(T))E_N \quad \text{et}$$

$$y_N = \mu_n(T)E_N + |T|(1 - E_N),$$

o E_N est le projecteur spectral relatif aux N premières valeurs propres de $|T|$:

$$E_N = \sum_{n<N} (\mu_n(T) - \mu_n(T))|\xi_n\rangle\langle\xi_n|.$$

Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Alors, $T = Ux_N + Uy_N$ et $(Ux_N, Uy_N) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K}$. D'o :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\sigma}_N(T) & \leq & \|Ux_N\|_1 + N\|Uy_N\|, \\ & \leq & \|x_N\|_1 + N\|y_N\|, \\ & \leq & \displaystyle\sum_{n<N} (\mu_n(T) - \mu_n(T)) + N\mu_n(T), \\ & \leq & \sigma_N(T). \end{array}$$

□

Remarque. Dans cette démonstration on a montré qu'il existait $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ de telle sorte que :

$$\|x\|_1 = \sigma_N(T) - N\mu_n(T) \qquad \text{et} \qquad \|y\| = N\mu_N(T).$$

Ce lemme permet de définir des traces partielles d'ordre réel :

Définition 7 *Pour $\lambda \geq 0$ et $T \in \mathcal{K}$, on appelle trace partielle de T d'ordre λ le réel :*

$$\sigma_\lambda(T) = \inf\{\|x\|_1 + \lambda\|y\| \ ; \ (x, y) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{K} \ \textit{et} \ x + y = T\}.$$

Lemme 6 *Soit $T \in \mathcal{K}$. Alors, la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Soit λ et μ des réels positifs, et $\alpha \in [0, 1]$. Si $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ sont tels que $x + y = T$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_1 + (\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu)\|y\| & \geq & \alpha(\|x\|_1 + \lambda\|y\|) + (1-\alpha)(\|x\|_1 + \lambda\|y\|), \\ & \geq & \alpha\sigma_\lambda(T) + (1-\alpha)\sigma_\mu(T). \end{array}$$

D'o $\sigma_{\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu}(T) \geq \alpha\sigma_\lambda(T) + (1-\alpha)\sigma_\mu(T)$. □

Proposition 6 *Soit $\lambda \geq 0$ et $T \in \mathcal{K}$. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_\lambda(T) & = & \sigma_N(T) + \alpha\mu_n(T), \\ & = & (1-\alpha)\sigma_N(T) + \alpha\sigma_N(T), \\ & = & \displaystyle\int_0^\lambda \mu_{[u]}(T)du \qquad , \qquad N = [\lambda], \alpha = \lambda - N. \end{array}$$

Démonstration. Les trois dernières égalités résultent de la définition de $\sigma_N(T)$. Ceci dit, on sait par le lemme 6 que la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est concave, donc :

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda(T) &\geq (1-\alpha)\sigma_N(T) + \alpha\sigma_N(T),\\ &\geq \sigma_N(T) + \alpha\mu_n(T).\end{aligned}$$

Réciproquement, on sait aussi par la remarque après le lemme 5, qu'il existe $x \in \mathcal{L}^1$ et $y \in \mathcal{K}$ tels que :

$$\|x\|_1 = \sigma_N(T) - N\mu_n(T) \qquad \text{et} \qquad \|y\| = N\mu_N(T).$$

Par conséquent $\sigma_\lambda(T) \leq \|x\|_1 + \lambda\|y\| \leq \sigma_N(T) + \alpha\mu_n(T)$. □

Remarques. 1. La proposition dit que la fonction $\lambda \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est affine entre deux entiers consécutifs : c'est l'interpolation affine des traces partielles d'ordre entier.

2. Pour tout entier $N > 0$, la fonction σ_N est une norme sur $\mathcal{K}$ équivalente à $\|.\|$, donc pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\sigma_\lambda \ : \ T \mapsto \sigma_\lambda(T)$ est aussi une norme sur $\mathcal{K}$ équivalente à $\|.\|$. En particulier, σ_λ est sous-additive.

De plus, on vérifie que la boule unité de $\mathcal{K}$ pour la norme σ_λ est l'envelloppe convexe de B_∞, la boule unité de $\mathcal{K}$ pour la norme $\|.\|$, et de $\lambda^{-1}B_1$ (B_1 désigne la boule unité de$\mathcal{L}^1$) :

$$B_{\sigma_\lambda} = \{T \in \mathcal{K} \ ; \ \sigma_\lambda(T) \leq 1\} = \mathrm{Conv}(B_\infty \cup \lambda^{-1}B_1)$$

3. La dernière égalité dit que :

$$\sigma_\lambda(T) = \int_{u\leq\lambda} \mu_{[u]}(T)du.$$

Ainsi, lorsque T est positif, $\sigma_\lambda(T)$ est un cut-off (intégral) de :

$$\mathrm{Trace}(T) = \int_0^\infty \mu_{[u]}(T)du,$$

par le paramètre scalaire λ.

Lemme 7 *Soit λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}_+$, et soit T_1 et T_2 dans $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})_+$. Alors :*

$$\sigma_{\lambda_1+\lambda_2}(T_1 + T_2) \geq \sigma_{\lambda_1}(T_1) + \sigma_{\lambda_2}(T_2).$$

Démonstration. La proposition 5 dit que l'inégalité est vraie lorsque λ_1 et λ_2 sont tous deux des entiers.

Pour i=1,2, on pose $N_i = [\lambda_i]$ et $\alpha_i = \lambda_i - N_i$. On pose aussi $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $N = [\lambda]$ et $\alpha = \lambda - N$. On a soit $N = N_1 + N_2$, soit $N = N_1 + N_2 + 1$.

Supposons que $N = N_1 + N_2$. Alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, et on a :

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda(T_1+T_2) &= (\alpha_1+\alpha_2)\sigma_{N_1+N_2+1}T_1+T_2\\ &\quad + (1-\alpha_1-\alpha_2)\sigma_{N_1+N_2}(T_1+T_2).\end{aligned}$$

D'o on déduit que :

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda(T_1+T_2) &\geq \alpha_1(\sigma_{N_1+1}(T_1)+\sigma_{N_2}(T_2)) \;+\; \alpha_2(\sigma_{N_1}(T_1)+\sigma_{N_2+1}(T_2))\\ &\quad + (1-\alpha_1-\alpha_2)(\sigma_{N_1}(T_1)+\sigma_{N_2}(T_2)),\\ &\geq (1-\alpha_1)\sigma_{N_1}(T_1) \;+\; \alpha_1\sigma_{N_1+1}(T_1)\\ &\quad + (1-\alpha_2)\sigma_{N_2}(T_2) \;+\; \alpha_2\sigma_{N_2+1}(T_2),\\ &\geq \sigma_{\lambda_1}(T_1) \;+\; \sigma_{\lambda_2}(T_2).\end{aligned}$$

Si $N = N_1 + N_2 + 1$, alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$, et on a :

$$\begin{aligned}\sigma_\lambda(T_1+T_2) &= (1-\alpha_1+1-\alpha_2)\sigma_{N_1+N_2+1}(T_1+T_2)\\ &\quad + (\alpha_1+\alpha_2-1)\sigma_{N_1+1+N_2+1}(T_1+T_2),\\ &\geq (1-\alpha_1)(\sigma_{N_1}(T_1)+\sigma_{N_2}(T_2))\\ &\quad + (1-\alpha_2)(\sigma_{N_1+1}(T_1)+\sigma_{N_2}(T_2))\\ &\quad + (\alpha_1+\alpha_2-1)(\sigma_{N_1+1}(T_1)+\sigma_{N_2}(T_2)),\\ &\geq (1-\alpha_1)\sigma_{N_1}(T_1) \;+\; \alpha_1\sigma_{N_1}(T_1)\\ &\quad + (1-\alpha_2)\sigma_{N_2}(T_1) \;+\; \alpha_2\sigma_{N_2}(T_2),\\ &\geq \sigma_{\lambda_1}(T_1) \;+\; \sigma_{\lambda_2}(T_2).\end{aligned}$$

□

Définition 8 *On appelle interpolé réel de* $\mathcal{L}^1$ *et de* $\mathcal{K}$*, le sous-espace :*

$$\mathcal{L}^{(1,\infty)} = \{T \ ; \ \sup_{u\geq e}\frac{\sigma_u(T)}{\log u} < \infty\},$$

o $e = \exp(1)$ *est le nombre de Neper.*

Proposition 7 $\mathcal{L}^1$ *un* C^**-idéal pour la norme :*

$$\|T\|_{(1,\infty)} = \sup_{u\geq e}\frac{\sigma_u(T)}{\log u} \qquad \forall T\in\mathcal{L}^{(1,\infty)}.$$

Démonstration. Tout d'abord, $\|.\|_{(1,\infty)}$ est le sup d'une famille de normes, donc cést une norm. D'autre part, par la proposition 6 on a :

$$\sup_{u\geq e}\frac{\sigma_u(T)}{\log u} \leq \sup_{N\geq 2}\sup_{0\leq\alpha\leq 1}\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\mu_N(T)+\alpha\mu_N(T)}{\log(N+\alpha)} \qquad \forall T\in\mathcal{K}.$$

Il résulte alors de la proposition 4 que $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et qu'on a :

$$\|ATB\|_{(1,\infty)} \leq \|A\|\|T\|_{(1,\infty)}\|B\| \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)},\ \forall (A,B) \in (\mathcal{L}^{(1,\infty)})^2.$$

En outre, par la proposition 3, l'idéal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est C^*-invariant et par la proposition 4 on a :

$$\||T|\|_{(1,\infty)} = \|T^*\|_{(1,\infty)} = \|T\|_{(1,\infty)} \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}.$$

Maintenant, soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ qui est de Cauchy pour $\|.\|_{(1,\infty)}$. Alors, cette suite est de Cauchy pour chacune des normes σ_λ. Comme ces normes sont toutes équivalentes à $\|.\|$, on voit qu'il existe $T \in \mathcal{K}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\lambda(T_n - T) = 0 \qquad \forall \lambda \geq e.$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour n et p assez grands on a :

$$\sigma_\lambda(T_n - T_p) < \epsilon \qquad \forall \lambda \geq e.$$

Faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\sigma_\lambda(T_n - T) < \epsilon \qquad \forall \lambda \geq e.$$

Il en résulte que $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ et que $\|T_n - T\|_{(1,\infty)} \to \infty$. $\square$

Proposition 8 *Soit $\mathcal{H}'$ un autre espace de Hilbert et soit $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ inversible. Alors,γ_S, l'opérateur de conjugaison par S de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$,induit un isomorphisme continu de $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ vers $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$.*

Démonstration. Comme γ_S est une bijection de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$, d'inverse $\gamma_{S^{-1}} : T' \mapsto ST'S^{-1}$, il suffit de prouver que γ_S envoit continument $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$.

La proposition 4 dit que :

$$\mu_n(S^{-1}TS) \leq \|S^{-1}\|\|S\|\mu_n(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

donc $\gamma_S(\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}))) \subset \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$, et on a :

$$\|\gamma_S(T)\|_{(1,\infty)'} \leq \|S^{-1}\|\|S\|\|T\|_{(1,\infty)} \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}).$$

$\square$

Remarque. 1. $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$est l'espace vectoriel normé dont la boule unité est :

$$B_{(1,\infty)} = \bigcap_{u\geq e} \log u. \operatorname{Conv}(B_\infty \cup u^{-1}B_1).$$

Ainsi on a les inclusions :

$$\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^{(1,\infty)} \subset \mathcal{K},$$

et les inégalités (lorsqu'elles ont un sens) :

$$\|T\| \leq \|T\|_{(1,\infty)} \leq \|T\|_1.$$

2. En tant qu'idéal $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est égal à l'idéal de Macaev :

$$\mathcal{L}^{\infty+} = \{T\ ;\ \mathcal{L}^{(1,\infty)} \sup_{N\geq 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N} < \infty\}.$$

Ce dernier est un C^*-idéal pour la norme :

$$\|T\|_{1+} = \sup_{N\geq 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}.$$

Cependant cette norme ne concide pas avec la norme $\|.\|_{(1,\infty)}$, bien qu'elle lui soit équivalente.

4 Trace de Dixmier

On va maintenant se concentrer sur la divergence logarithmique de $\sigma_\lambda(T)$ et évaluer son expansion logarithmique. Ceci nous amènera à la trace de Dixmier.

Définition 9 *Pour $\lambda \geq e$ et $T \in \mathcal{K}$ on pose :*

$$\tau_\lambda(T) = \frac{1}{\log \lambda} \int_e^\lambda \frac{\sigma_u(T)}{\log u} \frac{du}{u}$$

Remarques. a) Pour $T \in \mathcal{K}$ fixé, la fonction $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ est continue et s'interprète comme la moyenne de Cesāro de $\sigma_\lambda(T)/\log\lambda$ par rapport à la mesure de Haar $\frac{d\lambda}{\lambda}$ du groupe localement compact $\mathbb{R}_+^*$.

b) Si $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$, on a $\sigma_u(T) \leq \|T\|_{(1,\infty)} \log u \forall u \geq e$. D'o :

$$\tau_\lambda(T) \leq \|T\|_{(1,\infty)} \qquad \forall \lambda \geq e.$$

Par conséquent la fonction $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$ appartient à $C_b([e,\infty))$.

Lemme 8 *Soit $\lambda \geq e$ et soit T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})_+ \cap \mathcal{L}^{(1,\infty)}$. Alors :*

$$|\tau_\lambda(T_1 + T_2) - \tau_\lambda(T_1) - \tau_\lambda(T_2)| \leq \|T_1 + T_2\|_{(1,\infty)} \frac{(\log\log\lambda + 2)\log 2}{\log \lambda}.$$

Démonstration. Comme les σ_u sont sous-additives on a :

$$\tau_\lambda(T_1+T_2) \leq \tau_\lambda(T_1)+\tau_\lambda(T_2).$$

Il nous faut alors majorer la différence $\tau_\lambda(T_1)+\tau_\lambda(T_2)-\tau_\lambda(T_1+T_2)$. Par la proposition 5 on a :

$$\sigma_{2u}(T_1+T_2) \geq \sigma_u(T_1)+\sigma_u(T_2) \qquad \forall u \geq e.$$

D'o :

$$\begin{aligned} \tau_\lambda(T_1)+\tau_\lambda(T_2) &\leq \frac{1}{\log\lambda}\int_e^\lambda \frac{\sigma_{2u}(T_1+T_2)}{\log u}\frac{du}{u}, \\ &\leq \frac{1}{\log\lambda}\int_{2e}^{2\lambda} \frac{\sigma_u(T_1+T_2)}{\log u/2}\frac{du}{u}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\log\lambda)|\tau_\lambda(T_1+T_2)-\tau_\lambda(T_1)-\tau_\lambda(T_2)| \leq \delta+\delta',$$

avec :

$$\delta = \int_e^\lambda \frac{\sigma_u(T_1+T_2)}{\log u}\frac{du}{u} - \int_{2e}^{2\lambda} \frac{\sigma_u(T_1+T_2)}{\log u}\frac{du}{u},$$

$$\delta' = \int_{2e}^{2\lambda} \sigma_u(T_1+T_2)(\frac{1}{\log u/2}-\frac{1}{\log u})\frac{du}{u}.$$

Grce à la relation de Chasles et à l' inégalité triangulaire on obtient :

$$\delta \leq \int_e^{2e} \frac{\sigma_u(T_1+T_2)}{\log u}\frac{du}{u} + \int_\lambda^{2\lambda} \frac{\sigma_u(T_1+T_2)}{\log u}\frac{du}{u}$$

Comme $\sigma_u(T_1+T_2) \leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}\log u \quad \forall u \geq e$, on voit que :

$$\delta \leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}(\int_e^{2e}\frac{du}{u}+\int_\lambda^{2\lambda}\frac{du}{u}) \leq 2\log 2\|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \delta' &\leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}\int_{2e}^{2\lambda}\log u(\frac{1}{\log u/2}-\frac{1}{\log u})\frac{du}{u}, \\ &\leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}\int_{2e}^{2\lambda}\frac{\log 2}{\log u/2}\frac{du}{u}, \\ &\leq \|T_1+T_2\|_{(1,\infty)}(\log 2)(\log\log\lambda). \end{aligned}$$

Rassemblant les inégalités on obtient le lemme. $\square$

Ce lemme s'interprète en termes de C^*-algébre. Considérons la C^* algébre:

$$A = Q([e, \infty)) = C_b([e, \infty))/C_o([e, \infty)).$$

Le lemme 8 dit qu' on a une application additive de $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$ dans A :

$$\tau : T \longmapsto \text{classe de } (\tau_\lambda(T))_{\lambda \geq e}.$$

En fait :

Lemme 9 *Soit ω un état sur A (i.e. que ω est une forme linéaire positive sur A telle que $\omega(1) = 1$). Alors, $\omega o \tau$ est un poids tracial sur $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$. La fonction $\lambda \mapsto \tau_\lambda(T)$, donc $\tau(T) \in A_+$ et on a $\omega(\tau(T)) \geq 0$.

D'autre part, soit $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ unitaire. Par la proposition 4 on a :

$$\mu_n(U^*TU) = \mu_n(T) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'o $\tau_\lambda(U^*TU) = \tau_\lambda(T) \quad \lambda \geq e$, et a fortiori, $\omega(\tau(U^*TU)) = \omega(\tau(T))$. $\square$

Comme $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ est un C^*-idéal, la proposition 2 s'applique : si ω un état sur A, le poids tracial $\omega o \tau$ sur $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$ se prolonge canoniquement en une trace sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$. On obtient ainsi la trace de Dixmier.

Définition 10 *Soit ω un état sur A. On appelle trace de Dixmier associée à ω, et on note Tr_ω, la trace sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ obtenue par prolongement linéaire du poids tracial $\omega o \tau$ sur $\mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$.*

Proposition 9 *Soit ω un état sur A. Alors :*

a) Tr_ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$.

b) Tr_ω ne dépend que de la topologie localement convexe de $\mathcal{H}$, et pas de son produit scalaire.

c) Soit $\mathcal{H}'$ un autre espace de Hilbert, et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ inversible. Notons Tr'_ω la trace de Dixmier associé à ω sur $\mathcal{H}'$. Alors :

$$\mathrm{Tr}'_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}).$$

Démonstration. a) Soit $T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$. D'après la remarque a) après la définition 9, on a :

$$\tau_\lambda(T) \leq \|T\|_{(1,\infty)} \qquad \forall \lambda \geq e.$$

Par conséquent, dans A, on a :

$$0 \leq \tau(T) \leq \|\tau(T)\| \leq \|T\|_{(1,\infty)}.$$

On en déduit que :

$$0 \leq \omega(\tau(T)) \leq \|T\|_{(1,\infty)}\omega(1) \leq \|T\|_{(1,\infty)}.$$

De la proposition 2.c), il résulte alors que Tr_ω, le pronlegement linéaire du poids tracial $\omega o \tau$, est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$.

b) Soit $\langle .|. \rangle'$ un autre produit scalaire sur $\mathcal{H}$ définissant la mme topologie que $\langle .|. \rangle$. Il existe alors $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ inversible tel que :

$$\langle \xi | \eta \rangle' = \langle S\xi | S\eta \rangle \qquad \forall (\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2.$$

Notons $\mathcal{H}'$ l'espace de Hilbert pour ce produit scalaire, et Tr'_ω la trace de Dixmier associée à ω sur $\mathcal{H}'$. Soit $T \in \mathcal{K}_+$. Alors $S^{-1}TS$ est un opérateur compact de $\mathcal{H}$, qui est est positif relativement à $\langle .|. \rangle'$, et qui a les mmes valeurs propres que T. Il en résulte que ses valeurs caractéristiques relativement à $\langle .|. \rangle'$ sont :

$$\mu_0(T), \mu_1(T), \ldots, \mu_n(T), \ldots.$$

On en déduit que $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}') = \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$, et qu'on a :

$$\mathrm{Tr}'_\omega(T) = \mathrm{Tr}_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})_+.$$

D'o $\mathrm{Tr}'_\omega = \mathrm{Tr}_\omega$ par linéarité.

c) La proposition 8 dit que $S^{-1}\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})S = \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')$. De plus, le b) ci-dessus, permet de remplacer le produit scalaire de $\mathcal{H}'$ par :

$$(\xi, \eta) \longmapsto \langle S\xi | S\eta \rangle.$$

On est ainsi ramené au cas o S est unitaire. Maintenant si $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})_+$, alors $S^{-1}TS$ appartient à $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}')_+$ et a les mmes valeurs propres que T, et par conséquent, $\mathrm{Tr}'_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$. Il en résulte que :

$$\mathrm{Tr}'_\omega(S^{-1}TS) = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}).$$

$\square$

Définition 11 *Soit $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$. On dit que T est mesurable si la valeur de $\mathrm{Tr}_\omega T$ est indépendante de l'état ω. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des opérateurs mesurables. On définit alors $⨍$ comme la forme linéaire sur $\mathcal{M}$ telle que :*

$$⨍ T = \mathrm{Tr}_\omega(T) \qquad \text{pour } T \in \mathcal{M} \text{ et } \omega \text{ état sur } A.$$

Proposition 10 *On a les propriètés suivantes :*

a) $\mathcal{M}$ *est un sous espace vectoriel fermé de* $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ *qui ne dépend pas du produit scalaire de* $\mathcal{H}$.

b) Soit $\mathcal{H}'$ *un autre espace de Hilbert, et* $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ *est inversible. Alors,* $S^{-1}\mathcal{M}(\mathcal{H})S = \mathcal{M}(\mathcal{H}')$ *et on a :*

$$\int\!\!\!\!\!-_{\mathcal{H}'} S^{-1}TS = \int\!\!\!\!\!-_{\mathcal{H}} T \qquad \forall T \in \mathcal{L}^{(\infty,\infty)}(\mathcal{H}).$$

Démonstration. On a :

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \bigcap_{\omega,\omega' \text{ états sur } A} \{T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})\ ;\ \mathrm{Tr}_\omega(T) = \mathrm{Tr}_{\omega'}(T)\}.$$

Par conséquent, la proposition résulte de la proposition 9. □

Lemme 10 *Les états sur* A *séparent les points.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Il s'agit de montrer l'existence d'un état ω sur A tel que $\omega(x) \neq 0$. Si ω est un état sur A, alors $\omega(\frac{x+x^*}{2})$ est réel et est égal à la partie réelle de $\omega(x)$. On peut ainsi supposer que x est auto-adjoint. De plus, quitte à changer x en $-x$, on peut se ramener au cas o $x \notin A_+$.

Maintenant, soit B l'espace de Banach *réel* formé des élèments auto-adjoints de A et munit de la norme induite. Appliquons le théorème de Hanh-Banach dans B au convexe A_+ et à C le convexe compact engendré par -1 et x : il existe une forme linéaire ϕ sur B et des réels $\alpha < \beta$ tels que :

$$\phi(A_+) < \alpha \qquad \text{et} \qquad \phi(C) > \beta.$$

En particulier, $\phi(A_+)$ est un sous-cne strict de $\mathbb{R}$. Or $\phi(1) \neq \phi(-1)$, donc $\phi(A_+)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et nécessairement $\phi(A_+) = \mathbb{R}_+$. Il en résulte, d'une part que $\phi(1)$ et $\phi(x)$ sont non nuls, et d'autre part que $\phi|_{A_+}$ est un poids sur A_+. Appliquant la proposition 2 on peut alors prolonger ϕ en une forme linéaire positive $\bar{\phi}$ de sorte que :

$$\omega = \frac{\bar{\phi}}{\phi(1)},$$

est un état sur A tel que $\omega(x) \neq 0$. □

Proposition 11 *On a les propriètés suivantes :*

a) Soit $T \in \mathcal{L}_+^{(1,\infty)}$. *Alors :*

$$(T \text{ mesurable et } \int\!\!\!\!\!- T = L) \Longleftrightarrow (\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = L).$$

b) Soit $T \in \mathcal{K}$. Supposons que T est positif et que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = L$$

Alors T est mesurable et $\mathrm{Tr}_\omega T = L$.

c) Le noyau de $⨍$ contient $\mathcal{L}^1$.

Démonstration. a) Si $\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = L$, alors $\tau(T) = L$, et pour tout état ω sur A on a :

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \omega(\tau(T)) = \omega(L) = L.$$

Autrement dit, $T \in \mathcal{M}$ et $⨍T = L$.

Réciproquement, supposons que T est mesurable et que $L = ⨍(T)$. Alors pour tout état ω sur A on a :

$$\omega(\tau(T) - L) = \mathrm{Tr}_\omega(T) - L = 0.$$

Comme par le lemme 10 les états sur A séparent les points, on en déduit que $\tau(T) = L$. D'o $\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = L$.

b) Soit N un entier ≥ 2. Alors, pour tout $\lambda \in [N, N+1]$, on a :

$$(\frac{\log N}{\log(N+1)})\frac{\sigma_N(T)}{\log N} \leq \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda} \leq (\frac{\log(N+1)}{\log N})\frac{\sigma_N(T)}{\log N}$$

Par conséquent $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda} = L$. D'o :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tau_\lambda(T) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\log\lambda} \int_e^\lambda \frac{\sigma_u(T)}{\log u}\frac{du}{u} = L.$$

Il résulte alors du a) ci-dessus que T est mesurable et que $⨍T = L$.

c) Si $T \in \mathcal{L}^1_+$, alors :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T)$$

Le b) ci-dessus dit alors que $T \in \mathcal{M}$ et que $⨍T = 0$. Comme $\mathcal{L}^1$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, la proposition 1 et le lemme 2 disent que tout èlèment de $\mathcal{L}^1$ est combinaison linéaire d'èlèments $\mathcal{L}^1_+$. Il en résulte que $\mathcal{L}^1$ est contenu dans le noyau de $⨍$. $\square$

Proposition 12 *Soit Δ un opérateur "non borné" tel que $\Delta \geq c > 0$, et tel que :*

$$\text{Trace}(e^{-t\Delta}) \sim \alpha t^{-p} \qquad \text{lorsque } t \to 0^+.$$

Alors Δ^{-p} est un opérateur mesurable et on a :

$$⨍ \Delta^{-p} = \frac{\alpha}{\Gamma(p+1)}.$$

Démonstration. Par hypothèse $e^{-\Delta}$ est un opérateur à trace. Il est donc compact. Comme il est positif, il existe une base orthonormée $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ telle que :

$$e^{-\Delta}\xi_n = \mu_n(e^{-\Delta})\xi_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ecrivons $\mu_n(e^{-\Delta}) = e^{\lambda_n}$ o $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. Par calcul fonctionnel, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta\xi_n &=& \lambda_n\xi_n, \\ \Delta^{-p}\xi_n &=& \lambda_n^{-p}\xi_n, \\ e^{-t\Delta}\xi_n &=& e^{-t\lambda_n}\xi_n. \end{array}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \|\Delta^{-p}\xi_n\| = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, l'opérateur Δ^{-p} est compact et on a :

$$\mu_n(\Delta^{-p}) = \lambda_n^{-p} \qquad \forall \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n\geq 0} e^{-t\lambda_n} = \text{Trace}(e^{-t\Delta}) \sim \alpha t^{-p} \qquad \text{lorsque } t \to 0^+.$$

Il résulte alors du théorème tauberien d'Hardy-Littlewood (cf. [An] et [Ha]) qu'alors on a :

$$\mu_n(\Delta^{-p}) = \lambda_n^{-p} \sim \frac{\alpha n^{-1}}{\Gamma(p+1)} \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

D'o on déduit :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(\Delta^{-p}) = \frac{\alpha}{\Gamma(p+1)}$$

Il en résulte que Δ^{-p} est un opérateur mesurable et qu'on a :

$$⨍(T) = \frac{\alpha}{\Gamma(p+1)}.$$

$\square$

Exemple. Soit Δ le laplacien (positif) sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. On regarde Δ comme un opérateur “non borné” positif sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}^n)$. L'analyse de Fourier dit qu'une base orthonormée de cet Hilbert est fournie par les fonctions :

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik.x} \qquad x \in \mathbb{T}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Dans cette base on a $\Delta e_k = |k|^2 e_k \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^n$. On en déduit que pour $t > 0$ on a :

$$e^{-t}\,\mathrm{Trace}(e^{-t(I+\Delta)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{-t|k|^2} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-tk^2})^n$$

On sait que :

$$\begin{aligned} |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}dx \quad &- \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-tk^2}| \leq 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}dx \quad &= \quad \sqrt{\frac{\pi}{t}}. \end{aligned}$$

D'o :

$$\mathrm{Trace}(e^{-t(I+\Delta)}) \sim (\frac{\pi}{t})^{\frac{n}{2}} \qquad \text{lorsque } t \to 0^+.$$

Il en résulte que $(I+\Delta)^{\frac{-n}{2}}$ est mesurable et qu'on a :

$$⨍ (I+\Delta)^{\frac{-n}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Plus généralement soit M une variété compact riemannienne de dimension n, et P un opérateur pseudo-différentiel sur M d'ordre $-n$. Alors P s'étend en un opérateur compact de l'espace de Hilbert $L^2(M)$. On montre [Co2] que cet opérateur est mesurable et qu'on a :

$$⨍ P = \frac{1}{n}\,\mathrm{Res}(P).$$

Ici $\mathrm{Res}(P)$ est le résidu de Wodzicki de P (ou résidu non commutatif) ; il est donné par la formule :

$$\mathrm{Res}(P) = (2\pi)^{-n}\int_{S^*M} \sigma_{-n}(P)(x,\xi)dxd\xi,$$

o S^*M est le fibré en sphère du fibré cotangent T^*M.

References

[An] K. Ananda-Rau *On Dirichlet's Series With Positive Coefficients.* Ricidenconti di Circ. Mat. di Palermo **54** (1929)

[Co1] A. Connes *Noncommutative Geometry.* Academic Press, 1994

[Co2] A. Connes *The Action in Noncommutative Geometry.* Comm. in Math. Phys. **117** (1988).

[CM] A. Connes et H. Moscovici *The Local Index Formula in Noncommutative Geometry.* GAFA **2**(1995).

[Di] J. Dixmier *Les C^*-algèbres et Leurs Représentations.* Gauthiers-Villars, Paris, 1964.

[GH] I.C. Gohberg et M.G. Kreĭn. *Introduction to the Theory of Linear Nonseladjoint Operators.* Trans. Math. Monogr., 18, Providence.

[HL] G.H. Hardy. *Divergent Series.* Clarendon Press, 1949.