C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, série I, p. 735-738, 2001
Géométrie différentielle/ *Differential Geometry*

Géométrie spectrale et formules d'indices locales pour les variétés CR et contact

Raphaël PONGE

Institut für Mathematik, Universität Potsdam, 14 415 Potsdam, Allemagne
Courriel : ponge@math.uni-potsdam.de

(Reçue le 22 janvier 2001, acceptée le 12 février 2001)

Résumé. On présente ici des applications géométriques du résidu non commutatif pour les variétés de Heisenberg. Ainsi on obtient des invariants conformes, on définit l'aire d'une variété pseudo-hermitienne et on démontre des formules locales pour l'indice d'opérateurs sous-elliptiques. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Spectral geometry and local index formulae for CR and contact manifolds

Abstract. *We present here geometric applications of the non-commutative residue for Heisenberg manifolds. Thereby we obtain conformal invariants, we define the area of a pseudo-Hermitian manifolds and we derive local formulae for the index of some sub-elliptic operators.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Dans la Note [11] on a construit un résidu non commutatif pour les variétés de Heisenberg. Étant donnés une variété de Heisenberg compacte (M^{d+1}, H) et un fibré $\mathcal{E}$ au-dessus de M, il existe un unique prolongement analytique TR de la trace sur l'espace $\Psi_H^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$ des $\Psi_H DO$ d'ordre complexe non entier. Le résidu non commutatif apparaît alors comme une une trace résiduelle, notée Res, sur l'algèbre $\Psi_H^{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{E})$ des $\Psi_H DO$ d'ordre entier.

Cette Note fait suite à [11] et présente des applications géométriques de la construction de ce résidu non commutatif. Dans la première section on s'intéresse à la géométrie spectrale des variétés de Heisenberg, produisant des invariants conformes pour les variétés pseudo-hermitiennes. Dans la deuxième, on étudie la géométrie non commutative des variétés de Heisenberg et on définit l'aire d'une variété pseudo-hermitienne. Dans la section 3 on donne des formules locales d'indices pour des opérateurs sous-elliptiques, comme l'opérateur géométrique qu'on construit section 4 pour les variétés pseudo-hermitiennes.

Dans toute cette Note on désignera par (M^{d+1}, H) une variété pseudo-hermitienne compacte et par $\mathcal{E}$ un fibré au-dessus de M et on renvoit à [11], dont on utilisera librement les notations, pour les définitions précises du résidu non commutatif et de la trace régularisée, ainsi que pour leurs principales propriétés.

Les résultats de cette Note, tout comme ceux de [11], sont issus de la thèse de doctorat de l'auteur soutenue à Orsay le 4 décembre 2000.

1 Géométrie spectrale des variétés de Heisenberg

Soit Δ un sous-laplacien sous-elliptique auto-adjoint sur M agissant sur les sections de $\mathcal{E}$. Par [11, théorème 2] on peut définir les puissances complexes Δ^s, $s \in \mathbb{C}$, de Δ comme un groupe à 1-paramètre holomorphe de $\Psi_H DO$ tels que $\operatorname{ord}\Delta^s = 2s$. Il en résulte qu'on peut définir la fonction zêta de Δ directement comme la fonction méromorphe $\zeta_\Delta(s) = \operatorname{TR}\Delta^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$.

D'autre part, il résulte de [11, théorème 1] que l'opérateur Δ est borné inférieurement. On peut alors définir l'opérateur $e^{-t\Delta}$ pour $t > 0$ et d'après [1] son noyau a pour t petit un développement asymptotique sur la diagonale de la forme $k_t(x,x) \sim t^{-\frac{d+2}{2}} \sum_{j\geq 0} t^j a_j(\Delta)(x)$, où les $a_j(\Delta)(x)$ sont des densités sur M à valeurs dans $\operatorname{END}\mathcal{E}$.

Proposition 1. – 1) *Si* $\dim M = d+1$ *est impaire, soit* $d+1 = 2n+1$, *alors on a* $\operatorname{res}_{s=k}\zeta_\Delta(s) = \frac{1}{2}\operatorname{Res}\Delta^{-k} = \frac{1}{(k-1)!}\int_M \operatorname{tr}_{\mathcal{E}_x} a_{n+1-k}(\Delta)(x)$ *pour* $k = 1, \ldots, n+1$, *tandis qu'aux entiers négatifs la fonction* ζ_Δ *est régulière avec* $\zeta_\Delta(-k) = (-1)^{k-1}(k-1)!\int_M \operatorname{tr}_{\mathcal{E}_x} a_{n+1+k}(\Delta)(x)$ *pour* k *entier* > 0 *et* $\zeta_\Delta(0) = \int_M \operatorname{tr}_{\mathcal{E}_x} a_{n+1}(\Delta)(x) - \dim\ker\Delta$.

2) *Si* $\dim M$ *est paire, la fonction* ζ_Δ *est régulière en l'origine et on a* $\zeta_\Delta(0) = -\dim\ker\Delta$.

Soit maintenant (M^{2n+1}, θ) une variété pseudo-hermitienne compacte. Afin d'étudier le problème de Yamabe CR, Jerison et Lee [8] on introduit le sous-laplacien pseudo-hermitien conforme $\boxdot_\theta = \Delta_b + \frac{n}{2(n+2)}R_n$, où Δ_b désigne le sous-laplacien pseudo-hermitien de Tanaka-Greenleaf-Lee et R_n la courbure scalaire de Tanaka-Webster. En effet, en faisant un changement conforme $\theta \to e^{2f}\theta$, $f \in C^\infty(M)$, de forme de contact on a $\boxdot_{e^{2f}\theta} = e^{nf}\boxdot_\theta e^{-(n+2)f}$. Soit $f \in C^\infty(M)$. Alors :

Théorème 1. – 1) *On a* $a_n(\boxdot_{e^{2f}\theta})(x) = e^{2f(x)}a_n(\boxdot_\theta)(x)$, *i.e.* $a_n(\boxdot_\theta)(x)$ *est un invariant conforme local de poids* -2.

2) *On a* $\partial_\epsilon \zeta_{\boxdot_{e^{2\epsilon f}\theta}}(s)_{\epsilon=0} = -2s\operatorname{TR} f\boxdot_\theta^{-s}$. *Ainsi* $\zeta_{\boxdot_\theta}(0)$ *est un invariant conforme global.*

3) *Pour tout entier* k *on a* $\partial\epsilon(\int_M a_k(D_{e^{2\epsilon f}\theta})(x))_{\epsilon=0} = 2(n+1-k)\int_M f(x)a_k(D_\theta)(x)$. *En particulier* $A_{n+1} = \int_M a_{n+1}(\boxdot_{e^{2f}\theta})(x)$ *est un invariant conforme global.*

Remarque.– Le 1) et le 3) sont les analogues pseudo-hermitiens des résultas principaux de [2] et [10] et si les invariances de $a_n(\boxdot_\theta)(x)$ et A_{n+1} sont démontrées dans [12] par des méthodes différentes, le 3) dans sa forme générale ici résout une conjecture posée dans [3].

2 Géométrie non commutative des variétés de Heisenberg

Théorème 2. – 1) *Si* $P \in \Psi_H^m(M, \mathcal{E})$, $\Re m < 0$, *alors* $\mu_k(P) = \mathrm{O}(k^{\frac{-|\Re m|}{d+2}})$, *où* $\mu_k(P)$ *est la* k*-ème valeur caractéristique de* P.

2) *Tout* $P \in \Psi_H^{-(d+2)}(M, \mathcal{E})$ *est mesurable pour la trace de Dixmier et vérifie* $⨍ P = \frac{1}{d+2}\operatorname{Res}P$.

On renvoit à [4] pour la définition et les principales propriétés de la trace de Dixmier. On rappelle néanmoins que c'est l'équivalent de l'intégrale en géométrie non commutative et qu'elle est définie sur les opérateurs infinitésimaux d'ordre 1 sur $L^2(M)$, c.a.d. les opérateurs compacts T tels que $\mu_k(T) = \mathrm{O}(1/k)$. Ainsi le théorème 2 implique qu'on peut intégrer tout $\Psi_H DO$ d'ordre entier P, et ce même s'il est d'ordre $> -(d+2)$, en posant $⨍ P = (d+2)^{-1}\operatorname{Res}P$.

Proposition 2. – *Soit* (M^{2n+1},θ) *une variété pseudo-hermitienne. Alors il existe des constantes universelles* α_n *et* β_n *telles que* $⨍\Delta_b^{-(n+1)}=\alpha_n\int_M(d\theta)^n\wedge\theta$ *et* $⨍\Delta_b^{-n}=\beta_n\int_M R_n(d\theta)^n\wedge\theta$.

En fait on a $⨍f\Delta_b^{-(n+1)}=\alpha_n\int_M f(d\theta)^n\wedge\theta$ pour toute $f\in C^\infty(M)$. Par conséquent, si on pose $ds=\alpha_n^{\frac{-1}{2n+2}}\Delta_b^{\frac{1}{2}}$, alors ds est un $\Psi_H DO$ d'ordre 1 et ds^{2n+2} redonne la forme volume $(d\theta)^n\wedge\theta$. Ceci permet en utilisant l'analogie avec le cas riemannien d'interpréter ds comme l'*élément de volume* de (M,θ) et de définir l'*aire* de (M,θ) comme $\operatorname{aire}_\theta M=⨍ds^{-2}$. En dimension 3 on obtient :

Théorème 3. – *Pour toute 3-variété pseudo-hermitienne* (M^3,θ) *on a* $\operatorname{aire}_\theta M=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_M R_1 d\theta\wedge\theta$.

Exemple.– Soit la sphère $S^3\subset\mathbb{C}^2$ munie de la forme de contact $\theta=\frac{i}{2}(z_1d\bar{z}_1+z_2d\bar{z}_2)$. Comme $R_1=4$ on vérifie qu'on a $\operatorname{aire}_\theta S^3=\pi^2/(2\sqrt{2})$.

3 Cohomologie cyclique et formules d'indices locales

Soit $\mathcal{S}$ un fibré sur M muni d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation γ et soit $D\in\Psi_H^1(M,\mathcal{S})$ auto-adjoint et impair, i.e. $D\gamma=-\gamma D$. On suppose ici que D^2 coïncide avec un sous-laplacien sous-elliptique modulo $\Psi_H^1(M,\mathcal{S})$. On peut alors donner des formules locales pour l'indice de D.

Proposition 3. – *Si* $\dim M$ *est paire, alors* $\operatorname{ind} D=0$, *et si* $\dim M$ *est impaire, soit* $d+1=2n+1$, *on a* $\operatorname{ind} D=\int_M \operatorname{Str}_{\mathcal{S}_x} a_{n+1}(D^2)(x)$.

Ensuite, les puissances complexes $|D|^{-s}$, $s\in\mathbb{C}$, donnent une famille holomorphe de $\Psi_H DO$ avec $\operatorname{ord}|D|^{-s}=-s$. Il résulte alors des propriétés de la trace régularisée et du résidu non commutatif (*cf.* [11, théorème 4]) qu'on peut appliquer la formule d'indice locale de Connes-Moscovici [5] et expliciter un représentant cohomologie cyclique paire pour le caractère de Chern du triplet spectral $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$, où $\mathcal{A}$ est l'algèbre $C^\infty(M)$ se représentant par multiplication dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}=L^2(M,\mathcal{S})$. On obtient alors l'indice de D à coefficient dans $K_0(\mathcal{A})\simeq K^0(M)$, i.e. $\operatorname{ind}_D: K^0(M)\to\mathbb{Z}$, par accouplement avec ce caractère de Chern.

En fait, ind_D a ici une réalisation géométrique simple (*cf.* [9]). Etant donné un fibré hermitien $\mathcal{E}$, on se donne une connexion hermitienne ∇ sur ce fibré, on forme l'opérateur twisté $D_{\nabla,\mathcal{E}}$ et alors on a $\operatorname{ind}_D[\mathcal{E}]=\operatorname{ind} D_{\nabla,\mathcal{E}}$. Comme la cohomologie cyclique de $C^\infty(M)$ coïncide avec l'homologie de M et que l'accouplement de la cohomologie cyclique avec la K-théorie est donné par l'accouplement avec le caractère de Chern en cohomologie, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4. – 1) *Il existe* $\operatorname{Ch}_* D\in H_{\text{paire}}(M)$ *telle que pour tout fibré hermitien* $\mathcal{E}$ *au-dessus de* M *et toute connexion hermitienne* ∇ *on ait* $\operatorname{ind}_D[\mathcal{E}]=\operatorname{ind} D_{\nabla,\mathcal{E}}=\langle\operatorname{Ch}_* D,\operatorname{Ch}^*\mathcal{E}\rangle$.

2) *On définit un courant de Rham pair* $C=(C_{2n})$ *représentant* $\operatorname{Ch}_* D$ *comme suit. Pour* $n=0$ *on pose* $C_0=0$ *si* $\dim M$ *est paire et* $\langle C_0,f\rangle=\int_M f(x)\operatorname{Str}_{\mathcal{S}_x} a_{\frac{d+2}{2}}(D^2)(x)$, $f\in C^\infty(M)$, *sinon. Puis si* $n\neq 0$ *on définit* C_{2n} *par l'égalité*

$$\langle C_{2n},f^0df^1\wedge\ldots\wedge df^{2n}\rangle=(n!)^{-1}\sum_{\sigma\in S_{2n}}\varphi_{2n}(f^0,f^{\sigma(1)},\ldots,f^{\sigma(2n)}),\qquad f^j\in C^\infty(M),$$

avec φ_{2n} *la* $2n$*-cochaîne sur* $C^\infty(M)$ *donnée par*

$$\varphi_{2n}(f^0,f^1,\ldots,f^{2n})=(2n)!\sum c_\alpha ⨍\gamma f^0[D,f^1]^{(\alpha_1)}\ldots[D,f^{2n}]^{(\alpha_{2n})}|D|^{-2(|\alpha|+n)},$$

où la somme est prise sur les multi-indices α *et a un nombre fini de termes non nuls,* $(d+2)c_\alpha^{-1}=(-1)^{|\alpha|}2\alpha!(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_1+\ldots+\alpha_{2n}+2n)$ *et le symbole* $T^{(k)}$ *désigne le* k*-ème commutateur itéré de l'opérateur* T *avec* D^2.

4 Un exemple en géométrie pseudo-hermitienne

Soit (M, θ) une variété pseudo-hermitienne compacte. Alors la forme de contact θ définit une structure complexe J sur $H = \ker \theta$ de telle sorte que $T_{1,0} = \ker(J + i) \subset T_{\mathbb{C}}H$ soit un sous-fibré intégrable. Il définit donc une structure CR sur M et la décomposition $H \otimes \mathbb{C} = T_{1,0} \oplus T_{0,1}$, où $T_{0,1} = \overline{T_{1,0}}$, donne par dualité une bigraduation sur $\Lambda^*_{\mathbb{C}} H^* = \Lambda^{*,*}$.

On supposera ici que $\dim M = 3$ et que H est muni d'une involution $X \to \overline{X}$ anti-linéaire (c.a.d. qui anti-commute avec J). Par exemple pour la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ munie de la forme de contact $\theta = \frac{i}{2}(z_1 d\bar{z}_1 + z_2 d\bar{z}_2)$, la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}^2$ induit une telle involution sur H.

On étend l'involution de H sur $H \otimes \mathbb{C}$ en posant $\overline{X + iY} = \overline{X} - i\overline{Y}$ pour X, Y dans H. Cette involution préserve $T_{1,0}$ et $T_{0,1}$ et induit par dualité une involution anti-linéaire sur $\Lambda^{*,*}$ conservant le bidegré. Cela permet alors de définir un opérateur de Hodge sur $\Lambda^{*,*}$ par l'égalité $\underline{*\alpha} \wedge \beta = (\alpha, \beta)_\theta d\theta$ pour $\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}$, où $(\,.\,,\,.\,)_\theta$ désigne la métrique hermitienne sur $\Lambda^{p,q}$ provenant de la métrique de Lévi sur $H \otimes \mathbb{C}$. On vérifie que $*^2 = (-1)^{p+q+1}$ sur $\Lambda^{p,q}$ de sorte qu'on obtient une $\mathbb{Z}_2$-graduation sur $\Lambda^{*,*}$ en posant $\gamma = i^{(p+q)^2+1} *$ sur $\Lambda^{p,q}$.

Maintenant, soit l'opérateur différentiel $Q_b = \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b - \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^*$, où $\bar{\partial}_b$ désigne l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M (*cf.* [1]). Il n'est pas sous-elliptique, mais par contre en chaque bidegré $Q_b - \gamma Q_b \gamma$ est au signe près un sous-laplacien sous-elliptique modulo $\Psi_H^1(M, \Lambda^{*,*})$. Il en résulte que l'équation $D_b|D_b| = Q_b - \gamma Q_b \gamma$ définit un $\Psi_H DO$ d'ordre 1 auto-adjoint et impair pour lequel la proposition 3 et le théorème 4 s'appliquent.

D'autre part, comme dans [6] on peut dans l'expression du caractère de Chern de D_b remplacer D_b par $D_b|D_b| = Q_b - \gamma Q_b \gamma$ qui est différentiel. On conjecture alors qu'en utilisant un calcul asymptotique à la Getzler [7] et la cohomologie cyclique d'algèbres de Hopf de [6] on puisse exprimer ce caractère de Chern à l'aide de classes caractéristiques.

Remerciements. L'auteur remercie Alain Connes, Charles L. Epstein, Henri Moscovici et Michel Rumin pour les échanges qu'il a eu avec eux.

Références bibliographiques

[1] Beals R., Greiner P., Stanton N., The heat equation on a CR manifold, J. Differential Geom. 20 (1984) 343–387.

[2] T.P. Branson T., Ørsted B., Conformal indices of Riemannian manifolds, Compositio Math. 60 (1986) 261–293.

[3] Branson T., Ørsted B., Conformal geometry and global invariants, Differential Geom. Appl. 1 (1991) 279–308.

[4] Connes A., Noncommutative geometry, Academic Press, San Diego, 1994.

[5] Connes A., Moscovici H., The local index formula in noncommutative geometry, GAFA 5 (1995) 174–243.

[6] Connes A., Moscovici H., Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem, Comm. Math. Phys. 198 (1998) 199–246.

[7] Getzler E., Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem, Comm. Math. Phys. 92 (1983) 163–178.

[8] Jerison D., Lee J.M., The Yamabe problem on CR manifolds, J. Differential Geom. 25 (1987) 167–197.

[9] Moscovici H., Eigenvalue inequalities and Poincar duality in noncommutative geometry, Comm. Math. Phys. 184 (1997), 619–628.

[10] Parker T., Rosenberg S., Invariants of conformal Laplacians, J. Differential Geom. 25 (1987) 199–222.

[11] Ponge R., Calcul fonctionnel sous-elliptique et résidu non commutatif sur les variétés de Heisenberg, C.R. Acad. Sci. Paris ?? série I (2001) ??–??.

[12] Stanton N.K., Spectral invariants of CR manifolds, Michigan Math. J. 36 (1989) 267–288.